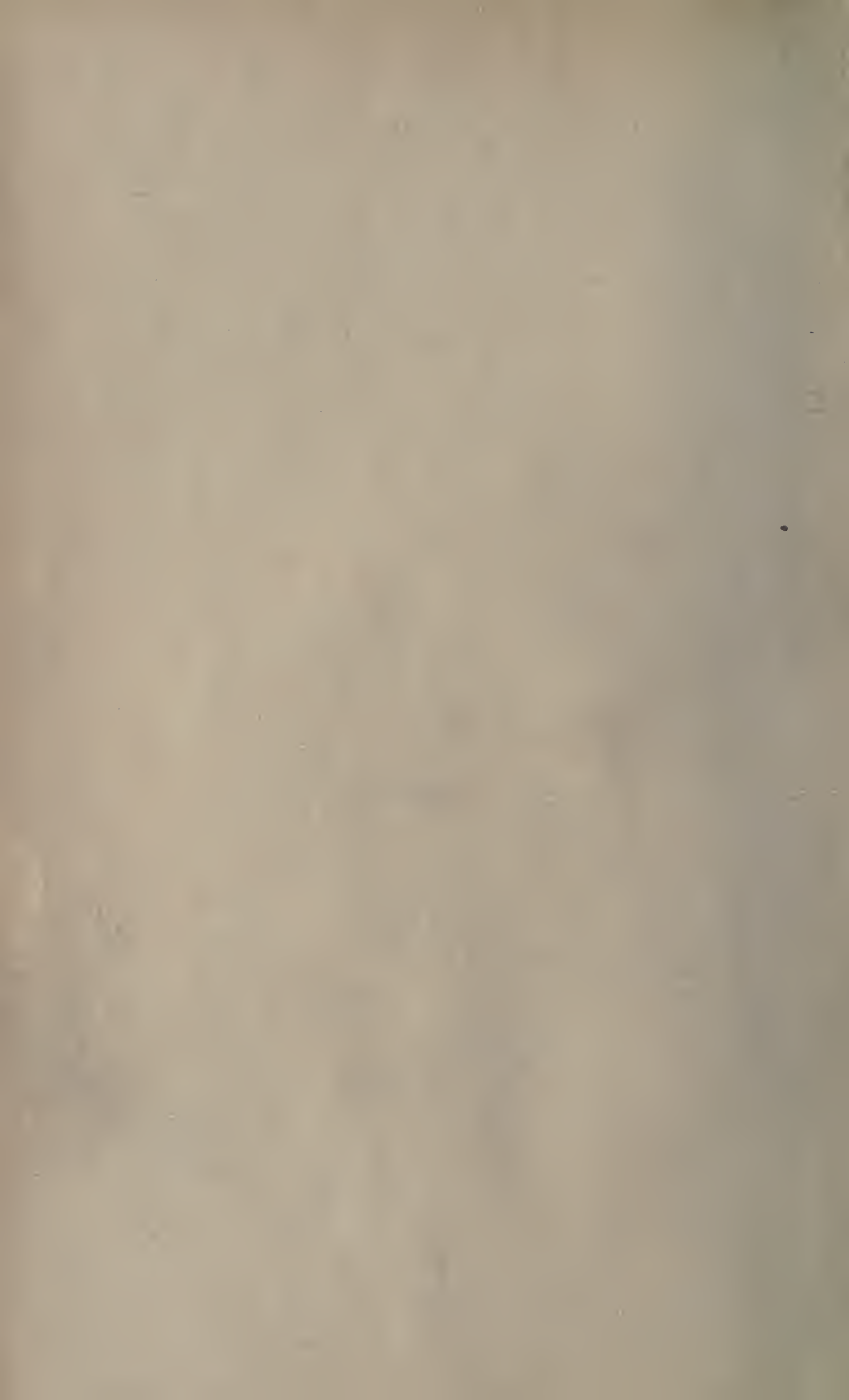

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01231191 6









Die

# LEBENDIGE KRAFT

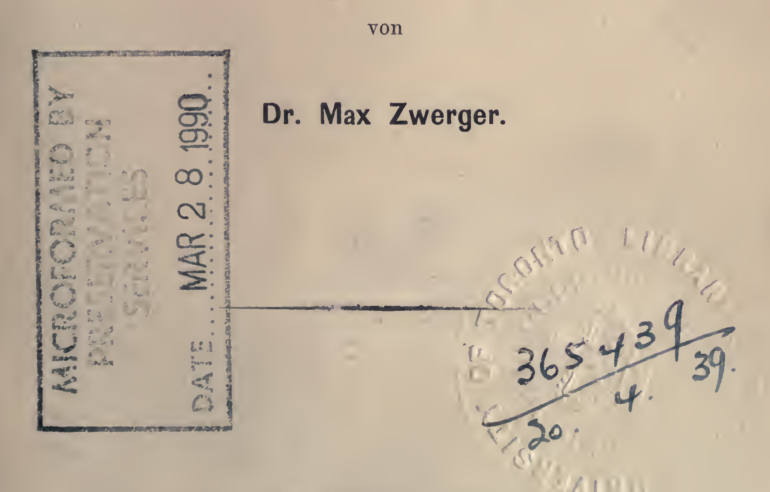
## und ihr Mafs.

---

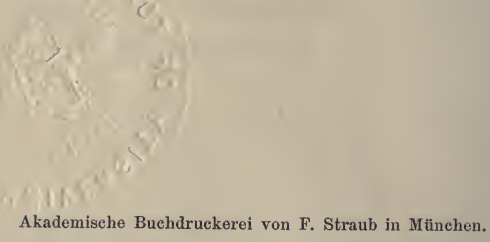
Ein Beitrag zur Geschichte der Physik

von

**Dr. Max Zwerger.**




MÜNCHEN, 1885.
Verlag der J. Lindauer'schen Buchhandlung.
**(Schöpping.)**



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

# Vorwort.

Historische Studien im Gebiete der Naturwissenschaften werden stets in zweifacher Richtung Nutzen bringen: einmal im Bereiche dieser Wissenschaften selbst, indem sie zeigen, wie ein Naturgesetz zum Bewusstsein des Menschen kam; dann aber in der Wissenschaft vom menschlichen Denken überhaupt, indem sie erkennen lassen, wie sehr dieses Denken dem Irrtume unterworfen ist und lehren, wie dieser Irrtum sich aufdecken und verbessern lasse. Die in vorliegender Arbeit behandelte Frage liefert für die Wahrheit dieser Behauptung einen schlagenden Beweis; der grosse Kant äussert sich darüber folgenderweise: „Es sind in der Trennung, die des Herrn von Leibnitz Kräfteschätzung in der Welt veranlasst hat, so viele Verblendungen und Abwege entstanden, als man bei so grossen Schlusskünstlern kaum vermuten sollte. Die Nachrichten, die man uns von allen den Vorfällen dieses berüchtigten Streites aufbewahren wird, werden dereinst in der Geschichte des menschlichen Verstandes eine sehr nutzbare Stelle einnehmen."

Auch der leider am Schlusse des verflossenen Jahres verstorbene Professor, Geheimrat Dr. v. Jolly äusserte sich einmal dem Verfasser gegenüber dahin, dass eine quellengemässe Darstellung der Entwicklung der hier behandelten Frage von grossem Interesse sein dürfte — zwei Urteile, welche, wenn es überhaupt einer Rechtfertigung des Unternehmens bedürfen sollte, als genügend zu betrachten sein möchten.

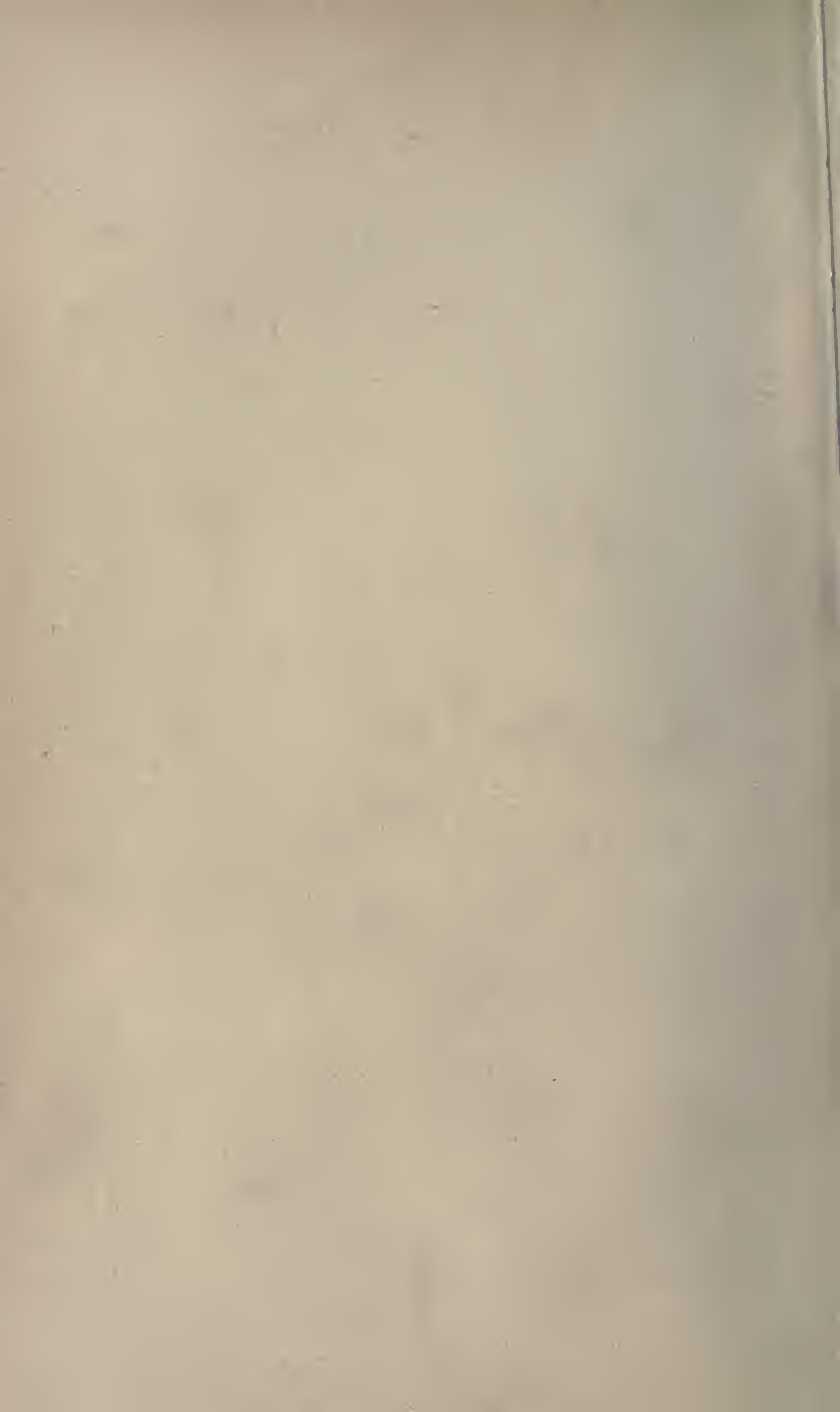
Die Ordnung des Stoffes konnte von zwei Gesichtspunkten aus getroffen werden; entweder konnte man nach dem Inhalte ordnen, das heisst etwa zuerst die verschiedenen Definitionen von lebendiger Kraft angeben und vergleichen, dann alle Arbeiten zusammenfassen, welche die eine Richtung und dann ebenso diejenigen, welche die andere Richtung vertreten; oder man konnte die Arbeiten in chronologischer Reihenfolge behandeln. Ich zog die letztere Art der Behandlung vor, nicht bloss weil sie die natürlichere scheint und Wiederholungen, welche bei der ersteren notwendig eintreten müssten, vermeiden lässt, sondern insbesondere, weil ich glaube, dass sie ein lebendigeres Bild der ganzen Entwicklung des Kampfes bietet. Nur bei zweien Arbeiten, nämlich bei denen Kants und d'Alemberts machte ich hievon eine Ausnahme, weil diese den Abschluss der ganzen Frage bilden und weil sie augenscheinlich — was ja bei den damaligen Verkehrsmitteln leicht denkbar ist — den um ein paar Jahre später schreibenden Autoren nicht bekannt waren, so dass sich dieser Verstoss gegen die Ordnung leicht rechtfertigen lässt. —

Kritische Bemerkungen wurden da beigefügt, wo dies nötig und zulässig erschien; zuweilen war dies überflüssig, nämlich dann, wenn die Arbeit eines Autors selbst eine Kritik der eines anderen enthielt; doch versuchte ich in diesem Falle die Gründe anzugeben, welche Anlass bieten, eher der einen als der anderen Meinung beizustimmen. Wie weit ich hiebei das Richtige getroffen, überlasse ich dem Urteile des Lesers. Dass übrigens manchmal eine Kritik unmöglich war, wie bei Hypothesen, deren Richtigkeit sich unmittelbar ebensowenig beweisen als widerlegen liess, liegt in der Natur der Sache.

München im September 1885.

**Der Verfasser.**

# Inhalt.



# Erster Abschnitt.

I. Wenn ein Körper seine Lage in Bezug auf andere Körper ändert, so sagen wir, er sei in Bewegung. Ueberall in der Natur sehen wir Bewegung und doch ist sie eines der grossen Rätsel, welche den menschlichen Geist von jeher beschäftigt haben und wohl immer beschäftigen werden. Kein Körper kann sich aus eigenem Antriebe bewegen; er muss stets von aussen durch irgend ein Agens, eine Kraft in Bewegung gesetzt werden. Das Wesen dieses Agens zu ergründen, wird uns wohl nie gelingen; aber gewisse wesentliche Eigenschaften desselben lernen wir durch Beobachtung kennen. Wir sehen z. B., dass, wenn wir zwei Körpern, welche verschiedene Masse besitzen, denselben Stoss versetzen, ihre Bewegung nicht die gleiche ist, dass der grössere Körper sich langsamer bewegt, als der kleinere, und suchen daraus festzustellen, wie viel mal rascher der eine läuft, als der andere. Mit anderen Worten: wir wollen die Bewegungen, wir wollen die Kräfte messen. Aber was soll uns zum Maſse der Kräfte dienen?

Den Alten war die Wissenschaft von den Bewegungen, von den Kräften so viel wie unbekannt; denn wenn auch ein Archimedes, ein Pappus eine Theorie des Gleichgewichtes aufzustellen suchten, so waren sie noch weit entfernt, die Lehre von den Bewegungen ihrem Studium zu unterwerfen. Gelehrte, welche dem späten Mittelalter, zumeist schon der

Neuzeit angehören, haben erst Licht in diese Sache gebracht, haben nach mühevoller Arbeit ein Mafs der Bewegung, der Kraft aufgestellt. Aus der Theorie des Gleichgewichtes heraus hat sich die Theorie der Bewegung entwickelt und darin liegt der Grund mannigfacher Irrtümer, welche sich in diese Theorie einschlichen, und welche den Anlass gaben zu dem grossen, in der Geschichte der Naturwissenschaften ewig denkwürdigen Streite, welcher länger als ein halbes Jahrhundert die angesehensten Geister aller Nationen beschäftigte. — Schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts schrieb der Ingolstädter Docent Joh. Christ. Arnold eine kurz gefasste Geschichte dieses Streites, die aber weder als vollständig betrachtet werden kann, weil diesem Manne mehrere hieher bezügliche Arbeiten offenbar nicht bekannt waren, noch auch einen Abschluss des Kampfes berichten konnte, weil damals die Lösung der Frage noch nicht allseitig anerkannt war. Diese Arbeit war mir aber um deswillen von grossem Nutzen, weil in ihr eine Anzahl von Quellen angegeben ist, welche mir gestatteten, weitere Forschungen anzustellen. Ich werde weiter unten auf diese Arbeit zu sprechen kommen.

II. Der Philosoph Descartes kam zuerst auf die Idee, dass die Summe der Bewegungsgrösse, d. h. die Summe der Produkte aus den Massen in die zugehörigen Geschwindigkeiten constant sein müsse; wie er sich aber die Kräfte und die Principien der Bewegung vorstellte, lässt sich aus seinen Schriften nicht deutlich erkennen. Erst seine Anhänger sprachen das Princip der Identität von Kraft und Bewegungsgrösse aus, gegen welches sich aber, nachdem Huyghens, Wallis, Wrennus, Mariott über die Theorie der Bewegung geschrieben hatten, gewaltige Bedenken erhoben, welche Leibnitz zuerst offen aussprach in einem im März 1686 in den Act. erud. Lips. erschienenen Aufsatze: Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem

naturae, secundum quam volunt a deo eandem semper motus quantitatem conservari.

„Mehrere Mathematiker“, sagt Leibnitz in der eben citierten Schrift, „schätzen, da sie sehen, dass bei den 5 einfachen Maschinen Geschwindigkeit und Masse sich gegenseitig compensieren, die bewegende Kraft namentlich nach der Bewegungsgrösse oder nach dem Produkte aus Masse und Geschwindigkeit. Und da es vernunftgemäss ist, dass dieselbe Summe von bewegender Kraft in der Natur erhalten bleibe, so kam es, dass Cartesius, welcher die bewegende Kraft und die Bewegungsgrösse für äquivalent hielt, aussagte, dass dieselbe Bewegungsgrösse von Gott in der Welt erhalten werde.

Um zu zeigen, welch grosser Unterschied zwischen diesen Begriffen ist, nehmen wir zuerst an, dass ein Körper, der aus einer gewissen Höhe herabfällt, die Kraft erlange, ebensoweit wieder aufzusteigen, wenn es die Richtung gestattet und kein äusseres Hindernis entgegensteht. Ich nehme zweitens an, dass eine ebenso grosse Kraft nötig ist, einen Körper A von 1 Pfd. zur Höhe CD = 4 Ellen zu heben als einen Körper B von 4 Pfd. zur Höhe EF = 1 Elle. Dies Alles wird von den Cartesianern und den übrigen Philosophen und Mathematikern unserer Zeit zugegeben. Daraus folgt, dass der Körper A, welcher die Höhe CD herabgefallen ist, ebensoviel Kraft erlangt hat, wie B, der über EF fiel.

Wir wollen nun sehen, ob die Bewegungsgrösse in beiden Fällen auch die gleiche ist. Es wird sich dabei ein deutlicher Unterschied ergeben. Das will ich auf folgende Weise zeigen: Galilei bewies, dass die beim Falle über CD erlangte Geschwindigkeit doppelt so gross sei wie die beim Falle über EF. Also ist die Bewegungsgrösse des $A = 1 \times 2 = 2$, die von $B = 4 \times 1 = 4$. Die Bewegungsgrösse, welche A in D hat ist demnach nur halb so gross wie die von B in C. Die Kräfte aber sind gleich. Es ist also ein bedeutender Unterschied zwischen bewegender Kraft und Bewegungsgrösse,

so dass die eine kein Mafs ist für die andere. Daraus erhellt, auf welche Art eine Kraft zu messen ist, nämlich mit der Grösse des Effekts, den sie hervorbringen kann, etwa mit der Höhe, zu welcher sie einen Körper von gegebener Grösse und Gestalt heben kann, nicht aber mit der Geschwindigkeit, welche sie dem Körper mitteilen kann; denn nicht eine doppelte sondern eine grössere Kraft ist nötig, dem Körper die doppelte Geschwindigkeit zu erteilen. Bei den einfachen Maschinen trifft es sich freilich zufällig, dass die Kraft mit der Bewegungsgrösse gemessen werden kann, und niemand wundert sich, dass, wenn die Grösse des einen Körpers durch die Geschwindigkeit des andern aufgehoben wird, oder wenn sich die Grössen bei gleicher Gestalt der Körper reciprok verhalten wie ihre Geschwindigkeiten, oder wenn auf die eine oder andere Art die gleiche Bewegungsgrösse sich ergibt, Gleichgewicht eintritt. Aber es gibt auch Fälle anderer Art, wo die eben erwähnten Grössen nicht zusammenfallen.

Man muss also sagen, dass die Kräfte sich verhalten wie die Körper (von derselben Dichtigkeit) und die Höhen, welche die Geschwindigkeiten erzeugen, aus deren Fall sie nämlich solche Geschwindigkeiten hätten erlangen können, oder weil dabei bisweilen gar keine Geschwindigkeit erzeugt worden ist wie die Höhen, welche entstehen sollten, nicht aber im Allgemeinen, wie die Geschwindigkeiten selbst, wie auf den ersten Blick als wahrscheinlich erscheinen könnte.“

III. Damit war der neue Gedanke ausgesprochen, dass nicht die einfache Geschwindigkeit, sondern das Quadrat derselben ein Mafs der Kraft sei nach dem Satze des Galilei, dass die beim Falle zurückgelegten Räume den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional seien.

Es war vorauszusehen, dass ein solcher das bis dahin gewohnte Kräftemafs umstossender Gedanke Widerspruch

erfahren musste; und dieser liess nicht lange auf sich warten. Schon im September des nämlichen Jahres (1686) liess der Abbé de Conti, ein Anhänger des Cartesius, in den Nouvelles de la republique des lettres einen kleinen Aufsatz einrücken unter dem Titel: Courte remarque de M. l'abbé de C. ou l'on montre à M. G. G. Leibnitz le paralogisme contenu dans l'objection précédente. „Ich wundere mich, sagt er, dass Leibnitz den Widerspruch in diesem Beweise nicht bemerkt hat; denn wo ist der Mann, der nur ein wenig in der Mechanik bewandert nicht merkte, dass das Princip der Cartesianer, welches sich auf die 5 einfachen Maschinen bezieht, nur von gleichzeitig wirkenden Kräften gilt oder von Bewegungen, die in der nämlichen Zeit mitgeteilt werden, wenn man zwei Gewichte mit einander vergleicht. Denn man zeigt in den Elementen, dass zwei Körper, ungleich an Volumen wie 1 und 4, aber gleich an Bewegungsgrösse 4, proportionale Geschwindigkeit haben im reciproken Verhälthältnisse ihrer Massen, also wie 4 : 1 und dass sie folglich in der nämlichen Zeit Wege durchlaufen, welche ihren Geschwindigkeiten proportional sind. Zudem zeigt Galilei, dass die Wege, welche von den Körpern durchlaufen werden, sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Also würde in dem Beispiele Leibnitzens der eine Körper von 1 Pfd. in der Zeit 2 zu einer Höhe von 4 Ellen steigen, und der Körper von 4 Pfd. in der Zeit 1 zu einer Höhe von 1 Elle. Und da ferner die Zeiten ungleich sind, ist es kein Wunder, dass er in diesem Falle die Bewegungsgrössen ungleich findet, obwohl sie gleich gefunden worden wären in dem Falle, welchen die Gleichheit der Zeiten zu einem von diesem ganz verschiedenen gemacht hätte. Nehmen wir einmal an, dass die beiden Körper sich in der nämlichen Zeit bewegen, d. h., dass sie an der nämlichen Wage aufgehängt sind und in Entfernungen, welche ihren Grössen reciprok sind, so werden wir die Grössen, welche sich ihren Bewegungen widersetzen,

gleich finden, oder die Grössen ihrer Gewichte, sei es nun, dass wir ihre Massen mit ihren Entfernungen multiplicieren oder mit ihren Geschwindigkeiten. Die Sache wird aber anders, wenn die Zeiten ungleich sind."

IV. Der Begriff der Zeit ist es also, welcher zuerst gegen Leibnitzens Ansicht ins Feld geführt wurde und der noch oft als Argument, gegen seine Theorie benutzt wurde, wiewohl Leibnitz selbst diesen Einwurf in völlig überzeugender Weise widerlegte und zwar im Februarheftchen des Jahres 1687 der oben genannten Nouvelles etc. „Ich hatte gezeigt", sagt er dort, „dass in einem bestimmten, ganz gewöhnlichen Falle und bei einer Unzahl von anderen ähnlichen, 2 Körper die nämliche Kraft haben, obwohl sie nicht die nämliche Bewegungsgrösse besitzen. Conti gibt das zu, fügt aber bei, man dürfe sich nicht wundern, weil in diesem Falle die Zeiten ungleich seien . . . Die Cartesianer verlangen insbesondere, dass dieselbe Summe von Kräften erhalten bleibe und schätzen diese immer durch die Quantität der Bewegung; sie kümmern sich aber dabei (mit Ausnahme des Herrn Abbé) durchaus nicht darum, ob sie in kurzer oder langer Zeit erlangt wurden, ob in gleichen oder ungleichen Zeiten; die Zeiten haben also mit diesem Maſse gar nichts zu thun. Conti sagt ferner: „Wenn man einen Körper von gegebener Masse und gegebener Geschwindigkeit sieht, kann man nicht seine Kraft schätzen, ohne zu wissen, in welcher Zeit und auf welchen Umwegen er seine Geschwindigkeit erlangt hat." Mir scheint, man kann über den gegenwärtigen Zustand urteilen ohne den vorhergehenden zu kennen. Wenn man zwei völlig gleiche und ähnliche Körper hat mit gleicher Geschwindigkeit, von denen der eine sie aber durch einen plötzlichen Stoss, der andere durch einen Fall von bemerkenswerter Dauer erhielt, wird man dann sagen können, die beiden Kräfte seien verschieden? Aber noch mehr: Es ist nicht einmal nötig, dass die beiden Körper, von denen ich gesprochen habe, ihre

verschiedenen Höhen in ungleichen Zeiten durchlaufen haben, wie der Herr Abbé angenommen hat, indem er gar keine Rücksicht darauf nimmt, dass man die Zeiten des Falles ändern kann, wie man will, ebenso wie man auch die Linie des Falles ändert, indem man sie mehr oder minder neigt und dass man eine Unzahl von Arten denken kann, auf welche die Körper von ihren verschiedenen Höhen in gleichen Zeiten herabfallen können . . . . . also hat die Unterscheidung der Zeit gar keinen Einfluss auf meinen Einwand."

Leibnitz betont also hier ausdrücklich, dass es nach seiner Ansicht für das Mass der Kraft, für den Zustand eines Körpers, in dem er sich befindet, völlig gleichgiltig ist, wie die Kraft erlangt wurde, ob durch einen plötzlichen Stoss oder durch eine continuierliche Beschleunigung durch die Schwere oder durch eine Feder. Damit weist er auch einen Einwurf zurück, der ihm von anderer Seite gemacht wurde (von wem konnte ich nicht finden), dass nämlich die nicht wahrnehmbare Materie, welche die Körper zum Fallen zwingt und deren Beschleunigung bewirkt, gerade die Bewegungsgrösse verloren habe, welche sie dem Körper mitteilt. Leibnitz glaubt nämlich, dass dieser Aether gerade so viel von seiner Kraft, aber nicht von seiner Bewegung verliere, als er dem fallenden Körper mitteilt, wobei es aber wieder von gar keinem Einflusse sei, wie die Kraft erlangt würde.

Um seine Ansicht genauer darzustellen, fügt er in derselben Abhandlung eine weitere Frläuterung seines Theorems bei.

Er sucht einen Beweis dafür zu liefern, dass, wenn man annimmt, die ganze Kraft eines Körpers von 4 Pfd. und der Geschwindigkeit 1 werde an einen Körper von 1 Pfd. abgegeben, dieser nicht eine Geschwindigkeit von 4 Grad haben könne, wie aus dem Principe des Cartesius folgen würde, sondern nur mehr 2 Grade, weil die Körper sich reciprok verhalten, wie die Höhen, zu welchen sie mit Hilfe ihrer Geschwindig-

keiten aufsteigen können, diese Höhen sich aber wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten. Wenn ein Körper von 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1, welche er in einer Horizontalebene hat, gegen das Ende eines Pendels oder eines vertikalen Fadens stösst und dieser bis zu einer Höhe von 1 Fuss steigt, so wird der von 1 Pfd. eine Geschwindigkeit 2 haben müssen, wenn er bis zu einer Höhe von 4 Fuss steigen soll; denn es bedarf derselben Kraft 4 Pfd. auf 1 Fuss wie 1 Pfd. auf 4 Fuss zu heben. Wenn aber der Körper von 1 Pfd. nach Cartesius 4 Grad Geschwindigkeit haben muss, so kann er zu einer Höhe von 16 Fuss steigen und folglich könnte dieselbe Kraft, welche 4 Pfd. auf 1 Fuss hebt, 1 Pfd. auf 16 Fuss heben. Das ist aber unmöglich; denn der Effekt ist der vierfache, also hätte er aus nichts das Dreifache an Kraft gewonnen. „Desshalb glaube ich, bemerkt Leibnitz, — ich füge die Stelle ihrer Wichtigkeit wegen wörtlich an — dass man an Stelle des Principes des Cartesius ein anderes Naturgesetz aufstellen könnte, welches viel allgemeiner und unverletzlicher ist, nämlich dass immer vollständige Gleichheit zwischen der vollen Ursache und dem vollen Effekte vorhanden ist; es sagt nicht nur, dass die Wirkungen ihren Ursachen proportional sind, sondern noch mehr, dass jeder Effekt seiner Ursache äquivalent ist. Und obwohl dieses Axiom vollständig metaphysisch ist, so gibt es doch in der Physik kein nützlicheres und es gewährt ein Mittel die Kraft auf geometrische Berechnungen zurückzuführen“ — eine Behauptung, welche allerdings Kant später mit grossem Eifer zu widerlegen suchte.

Um aber noch deutlicher zu zeigen, wie man sich dieses Axioms bedienen muss und warum Des Cartes und Andere demselben abgeneigt sind, wollen wir seine dritte Regel der Bewegung betrachten und annehmen, dass 2 Körper B und C jeder von 1 Pfd. gegen einaneer laufen, B mit der Geschwindigkeit 100, C mit der Geschwindigkeit 1.

Ihre Bewegungsgrösse ist $100 \times 1 + 1 \times 1 = 101$. Aber wenn C mit seiner Geschwindigkeit zu 1″ Höhe steigen kann, steigt B mit der seinigen 10000″. also wird die Kraft der beiden im stande sein 1 Pfd. auf 10001″ zu heben. Aber nach dieser dritten Regel des Cartesius werden sie nach dem Stosse miteinander mit der Geschwindigkeit $50\frac{1}{2}$ laufen, damit durch Multiplikation mit 2 (Zahl der bewegten Pfunde) wieder die Bewegungsgrösse 101 zum Vorschein kommt. Aber so werden sich diese 2 Pfd. nur zu einer Höhe von $(50\frac{1}{2})^2 = 2550\frac{1}{4}$″ erheben können und dieses gilt so viel, als wenn sie die Kraft hätten 1 Pfd. auf $5100\frac{1}{2}$ zu heben, während sie vor dem Stosse die Kraft hatten, 1 Pfd. auf 10001″ zu heben. Also wird nachher die Hälfte der Kraft verloren sein auf Grund dieser Regel, ohne zu irgend etwas verwendet worden zu sein. Und das ist ebenso wenig möglich als der frühere Fall, wo in Folge desselben allgemeinen Princips des Cartesius die dreifache Kraft ohne irgend einen Grund gewonnen wurde.

Was in dieser Sache die meiste Verwirrung brachte ist der Umstand, dass man sah, dass Körper, deren Geschwindigkeiten ihren Grössen reciprok sind, sich beim Stosse gegenseitig zum Stehen bringen. Darin liegt der Grund, warum man glauben konnte, dass die Kräfte gleich seien, ja noch mehr, dass man an den Körpern nichts sah, als ihre Geschwindigkeit und ihre Gestalt. Aber hier ist die Stelle, an welcher man die Unterscheidung zwischen einer Kraft und einer Richtung hätte mit Nutzen anwenden können, oder vielmehr zwischen der absoluten Kraft, welche nötig ist, einen Effekt hervorzubringen und zwischen der Kraft, deren ein Körper bedarf, nach einer gewissen Richtung vorwärts zu gehen oder eine Richtung beizubehalten. Denn wenn auch ein Körper 2 mit der Geschwindigkeit 1 und ein Körper 1 mit der Geschwindigkeit 2 sich gegenseitig aufhalten oder sich hindern vorwärts zu gehen, kann nichts-

destoweniger der erste 1 Pfd. zu einer Höhe von 2′, der andere 1 Pfd. zu einer Höhe von 4′ heben. Das scheint paradox, ist aber nach dem Gesagten unzweifelhaft richtig.

V. Auf diese Erwiderung Leibnitzens erschien im Juni 1687 in den mehrfach erwähnten „Nouvelles“ eine Entgegnung des Herrn Conti unter dem Titel: Remarque de M. l'abbé de C. sur la replique de M. L. touchant le principe mechanique d. M. Descartes. Conti stimmt mit Leibnitz darüber überein, dass 1) dieselbe Kraft nötig sei, 1 Pfd. auf 4′ zu heben, wie 4 Pfd. auf 1′, dass 2) die Wege, welche schwere Körper beim Falle zurücklegen, sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten und dass 3) das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit ein Maſs für die Bewegung eines Körpers sei. Aber den Widerspruch, welchen Leibnitz in dem Cartesianischen Maſs der Kräfte findet, kann er nicht entdecken. Er meint, Leibnitz vermenge zwei ganz verschiedene Dinge, desshalb müssten sich auch die Consequenzen, welche jener daraus ziehe, widersprechen und brauche keines von diesen Principien falsch zu sein. Die Kraft in den Körpern selbst sei das, was man ihre Bewegung nenne. Nehme man auf die Masse der Körper Rücksicht, so sage man, ein Körper habe eine gewisse Bewegungsgrösse; betrachte man aber nur den von ihm durchlaufenen Weg, so sage man, er habe eine gewisse Geschwindigkeit.

Auch mit der Ansicht Leibnitzens, dass es gleichgiltig sei, auf welche Art ein Körper seine Kraft erlangt habe, kann sich Conti nicht zufrieden geben.

Jede Bewegung, so bemerkte er, erfordert Zeit. Haben zwei Körper gleiche Wege durchlaufen und man kennt die Dauer der Bewegung nicht, so kann man nicht beurteilen, ob sie gleiche Bewegung haben. Es gibt also Fälle, bei denen die Kenntnis der Zeit nötig ist, um die bewegende Kraft beurteilen zu können. Ein Beispiel: Man weiss, dass zwei Körper, von denen der eine viermal so gross ist, als

der andere, gleiche Bewegungen haben; dann ist klar, dass der vierfache Körper nur den vierten Teil der Geschwindigkeit des einfachen hat, weil die Grösse der Bewegung auf seine vier Teile verteilt werden muss. Aber das Verhältnis der durchlaufenen Wege lässt sich nicht bestimmen, solange die Dauer der Bewegung unbestimmt ist. Setze ich aber fest, der vierfache Körper bewege sich doppelt so lange, als der einfache, so wird er die Hälfte des Weges des einfachen zurücklegen; läuft er viermal so lange, so kommt er gleich weit. Wenn also die Bewegungsgrösse oder die Kräfte gleich sind, die Zeiten aber ungleich, so können die durchlaufenen Wege nicht reciprok den Massen oder Geschwindigkeiten sein. Ich glaube nicht, dass Einer sagen kann, er gebe das Alles zu, aber man könne daraus keinen Schluss ziehen zu Gunsten der Cartesianischen Principien gegen den Einwurf Leibnitzens. Sonst müsste ich fragen, ob er ganz deutlich versteht, dass 2 Körper, von denen der eine viermal so gross ist, wie der andere, wesentlich verschieden seien von 2 Gewichten mit 1 oder 4 Pfd., und dass es eine ganz andere Sache sei mit den gleichen Bewegungsgrössen den einfachen Körper über 4′ und den vierfachen über 1′ zu bewegen, als mit der gleichen Kraft 1 Pfd. auf 4′ und 4 Pfd. auf 1′ zu heben. Da ein und dieselbe Bewegung nicht mehr und nicht weniger Effekt hervorbringt, ob sie längere oder kürzere Zeit dauert, so scheint es mir, dass der ganze Widerspruch, welchen Leibnitz zwischen den Principien Descartes und Galileis findet, nur daher kommt, dass er sich begnügt, die Kräfte nach ihrem Effekte zu beurteilen, oder die Bewegungen nach den durchlaufenen Wegen ohne irgend welche Rücksicht auf die Zeit, was natürlich die Sache ändert. Zeuge dafür sei ein Beispiel nach Galilei: 2 Gewichte, welche durch ihre Schwere fallen, das eine von 1 Pfd. über 4′. das andere von 4 Pfd. über 1′ erreichen Geschwindigkeiten, die sich verhalten wie die Wurzeln aus den durch-

laufenen Wegen, also wie 2 : 1; ihre Bewegungsgrössen werden sich also nach dem Gesagten wie $1 \times 2 : 4 \times 1 = 1 : 2$ verhalten. Also sind in diesem Falle die Kräfte ungleich, welche in dem Beispiel Descartes gleich geschätzt werden. Wo liegt der Widerspruch? Dieser Philosoph spricht von bewegenden Kräften, die in gleichen Zeiten wirken, und Galilei vergleicht Kräfte oder Bewegungen, welche in ungleichen Zeiten wirken.

Es ist unnütz zu wiederholen, wie Leibnitz es macht, dass durch die geneigte Ebene, über welche er Lasten auf- und absteigen lässt, die Zeit verlängert werde, ohne dass die Linie des Falles sich ändert; denn es ist ja in den Lehrbüchern der Mechanik gezeigt, dass die Kraft, welche nötig ist, ein Gewicht über eine schiefe Ebene zu heben, kleiner ist wie jene, welche man braucht, um es senkrecht in die Höhe zu heben. Der Grund dafür liegt darin, dass man es in der nämlichen Zeit um so weniger hoch hebt, als die geneigte Ebene länger ist, der Art, dass die hier angewendete bewegende Kraft, öfters angewendet, denselben Effekt hervorbringt, wiewohl sie kleiner ist.

Was nun das dritte Princip betreffe, so mache es gar keine Schwierigkeiten. Die Geschwindigkeiten 1 und 3 zweier Körper A und B mit ihren Massen 4 und 5 multiplicieren, sei nichts anderes als 2 Zahlen multiplicieren, deren zweite 4 und 5 angebe, wie viele gleiche Teile ein Körper enthalte im Verhältnisse zu einem anderen und deren erste 1 und 3 ausdrücke, welches Verhältnis stattfinde zwischen bestimmten Bewegungen, welche jedem der gleichen Teile der beiden Körper A und B zukommen und die man ihre Geschwindigkeiten nenne, so gut als das Produkt aus 1 und 4 einerseits, 5 und 3 anderseits, das Verhältnis einer jeden Geschwindigkeit sei, so oft genommen, als es Teilchen in jeder Masse gebe, so dass es das Verhältnis der Gesamtbewegungen oder Bewegungsgrössen jedes Körpers A und B

bezeichne. Um also die relativen Bewegungsgrössen zu haben, müsse man die Zahlen, welche das Verhältnis der Massen ausdrücken, mit den Zahlen, welhe das Verhältnis der Geschwindigkeiten derselben darstellen, multiplicieren.

VI. Eine Widerlegung der Behauptung Leibnitzens wird man in dem vorhergehenden Schreiben Contis vergeblich suchen, ja es ist von dem neuen Masse nicht an einer Stelle die Rede. Und Contis Behauptung, dass Leibnitz zwischen den drei oben aufgestellten, den beiden Parteien zugegebenen Thesen einen Widerspruch finde, ist gar nicht richtig. Leibnitz stellte sie vielmehr, wie er in seinem im September 1687 in den „Nouvelles“ erschienenen Antwortschreiben bemerkt, desshalb auf, um gerade die Irrtümer Descartes aufzudecken. Im übrigen würdigte er seinen — ihm kaum gewachsenen — Gegner keiner weiteren Entgegnung, „weil ja alles, was jener sage, nur dazu diene, gerade seine Behauptungen zu erklären und aufrecht zu halten.“ Offenbar, um sich solch wenig fruchtbare Dispute künftig ferne zu halten, präcisierte er in diesem Aufsatze wiederholt seine Anschauung, indem er folgende 4 Fragen zur Beantwortung aufstellte:

1) Ist es wahr, dass nach Descartes ein Körper von 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1 dieselbe Kraft hat, wie ein solcher von 1 Pfd. mit der Geschwindigkeit 4? Und wenn die ganze Kraft eines Körpers von 4 Pfd. auf einen solchen von 1 Pfd. übergehen muss, wird dann nicht dieser die vierfache Geschwindigkeit des ersteren erlangen nach dem Principe von der Quantität der Bewegung, auf welchem Descartes Regeln beruhen?

2) Ist es nicht wahr, dass der erste mit der Geschwindigkeit 1 ein Gewicht von 4 Pfd. auf 1′ (oder was dasselbe ist, 1 Pfd. auf 4′) heben kann, der zweite aber mit 4 Grad Geschwindigkeit ein Gewicht von 1 Pfd. auf 16′, nach den Beweisen Galileis und anderer?

Folgt 3) aus der Ansicht des Cartesius nicht, dass man aus einer Kraft, welche 4 Pfd. auf 1' oder 1 Pfd. auf 4' heben kann, durch Translation eine Kraft machen kann, welche 1 Pfd. auf 16' hebt und den Ueberschuss an Kraft aus Nichts erhält?

4) Der Wahrheit gemäss muss aber die ganze Kraft eines Körpers von 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1 einem Körper von 1 Pfd. nur die Geschwindigkeit 2 erteilen, damit, wenn ersterer sein Gewicht auf 1', letzterer das seinige auf 4' heben kann. Und also bleibt nicht dieselbe Bewegungsgrösse, sondern dieselbe Kraftgrösse, welche man schätzen muss nach dem Effekt, den sie erzeugen kann.

Das gibt Leibnitz Conti noch zu, dass man die Kraft nach Umständen durch die Zeit messen könne, etwa wenn man die Linie kennt, über welche ein Körper herabfällt; je nachdem sie mehr oder minder gekrümmt ist, wird sich die Zeit ändern, während es sonst genügt die Höhe zu wissen, um die Kraft zu beurteilen, welche der Körper im Fallen erreicht.

Eine weitere Entgegnung von Seite des Herrn Conti erschien nicht mehr, wie Leibnitz in seiner Abhandlung de linea isochrona bemerkt. (Acta erud. Lips. April 1689.) Damit endet der erste Akt des grossen Streites.

VII. Ein neuer und wohl auch bemerkenswerterer Gegner erhob sich gegen Leibnitz in G. Papin, welcher im April 1689 in den Act. erud. in seinem Aufsatze de gravitatis causa et proprietatibus observationes die Leibnitz'sche Hypothese bekämpfte. Er sagt, Galilei nehme an, dass ein schwerer Körper in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten erlange; das habe Blondellus experimentell, Huyghens a priori bewiesen, letzterer indem er voraussetzte, die Bewegung der Materie, welche schwere Körper bewegt, sei von unbegrenzter Geschwindigkeit im Verhältnisse zu den Geschwindigkeiten fallender Körper. Dann werde auch ein schwerer Körper,

sei es, dass er ruht oder dass er sich bewegt, immer in gleicher Weise von der treibenden Kraft afficiert, da er im Vergleich mit dem Bewegenden unter allen Umständen für ruhend gehalten werden könne. Er nehme ferner an, die Geschwindigkeit des Bewegenden entstehe dadurch, dass eine feine um die Erde gelagerte und vom Centrum zurückweichende Materie andere Körper gegen die Erde stosse. Freilich erhoben Sturm und Bernoulli gegen diese Annahme das Bedenken, ob nicht vielmehr schwere Körper dann gegen die Achse statt gegen das Centrum gestossen werden müssten. Dieser Schwierigkeit suchte nun Papin dadurch zu begegnen, dass er voraussetzte, die die Schwere hervorbringende Materie habe eine unverhältnismässig grössere Geschwindigkeit, als der Erdumfang, so dass der Unterschied der Geschwindigkeit am Aequator und an irgend einem Parallelkreise verschwindend klein werde. Mit dieser unendlich grossen Geschwindigkeit des Motors der Schwere suchte er nun auch gegen Leibnitz zu kämpfen. Wenn nämlich ein schwerer Körper auch in Ruhe sei, so werden ihm doch in gleichen Zeiten gleich viele Stösse mitgeteilt, gerade so, als wenn er sich bewege und deshalb verhielten sich die bewegenden Kräfte wie die Zeiten, also wie die Wurzeln aus den Wegen und nicht wie diese selbst, wie Leibnitz meine. Wenn nun dieser sage, es sei feststehend, dass dieselbe Kraft, welche 4 Pfd. auf 1′ hebt, 1 Pfd. auf 4′ hebe und dass so Weg und Kraft in demselben Verhältnisse seien und dass man bei der Bestimmung einer bewegenden Kraft auf die Zeit keine Rücksicht zu nehmen brauche, so sei dies allerdings bei den Maschinen richtig, wo dem steigenden Körper immer neue Kraft mitgeteilt werde; dort werde nämlich die Zeit auf beiden Seiten für die bewegende Kraft und den Widerstand gleichmässig vermehrt oder vermindert; hier aber sei es ganz anders; der steigende Körper habe in sich schon hinreichende Kraft und empfange keine neue. Hier müsse also nur auf den Wider-

stand gesehen werden, welcher jene Kraft vermindere und dieser hänge, wie eben gezeigt, nicht vom Wege, sondern von der Zeit ab.

VIII. Leibnitzens Antwort auf diesen Einwurf Papins findet sich in den Act. erud. Lips. Mai 1690, wo er sagt:

„1) Galilei nimmt bei den schweren Körpern nicht bloss eine Bewegung an, welche in gleichen Zeiten gleichmässig beschleunigt wird, sondern er stützt sich dabei auf Vernunftgründe und Experimente und kam gewiss nicht bloss zufällig zu dieser Ansicht.

2) Unser Gegner (Papin) vermengt den Beweis einer Wahrheit mit der Angabe eines Grundes durch eine Hypothese und hat vielleicht Huyghens' Ansicht nicht einmal ganz erfasst, dessen Streben nicht war zu zeigen, dass die erwähnte Art wirklich die Natur der schweren Körper sei, sondern nur, dass sie wahrscheinlich so sein könne.

3) Einen absoluten Beweis dieser Wahrheit werden wir in unserer Dynamik geben und zwar ohne Hypothese.

4) Die Hypothese, welche man die cartesianische nennt, stammt vielmehr von Kepler, mag sie auch von Carsius mehr ausgebildet worden sein.

5) Mag auch richtig geschlossen werden, dass die Geschwindigkeit der Materie, welche die Schwere verursacht, unverhältnismässig grösser sei, als die der schweren Körper selbst, so ist dies doch nicht nötig zur Erklärung der in Folge der Centrifugalkraft gleichen Beschleunigung der schweren Körper . . . .

Vor allem muss man die Gelegenheit zu einer blossen Wortfechterei vermeiden. Da nämlich der Streit sich darum dreht, ob die Bewegung erhalten bleibe, oder vielmehr dieselbe Grösse der Kraft in dem Sinne, wie sie von mir aufgefasst wird, d. h. nicht im Verhältnisse der Kraft und Geschwindigkeit, sondern von Kraft und Weg, so werden wir leicht um Worte verhandeln.“ Dieser Gefahr sucht nun

Leibnitz durch eine Definition der Ungleichheit zweier Kräfte zu entgehen und zwar mit Hilfe einer deductio ad absurdum. In der Physik heisse es gleichviel, ein Problem auf eine perpetuierliche mechanische Bewegung zurückzuführen, wie dasselbe als unmöglich zu erweisen. So oft man also zeigen könne, dass durch Ersetzung einer Kraft durch eine andere eine solche perpetuierliche Bewegung entstehe, so oft sei auch bewiesen, dass diese beiden Kräfte ungleich sein müssten. Daraus ergebe sich aber notwendiger Weise, dass dieselbe Kraft in den Körpern erhalten bleiben müsse, oder dass der volle Grund und der volle Effekt, also der vorhergehende und der nachfolgende Zustand der nämliche sein müsse; denn so bald dem vorhergehenden Zustande ein stärkerer folgte, würde eine perpetuierliche Bewegung entstehen. Aus demselben Grunde folge, dass die Kräfte im Verhältnisse von Masse und Weg und nicht in dem von Masse und Geschwindigkeit zusammengesetzt seien, d. h. dass die Summe der Produkte aus Massen und Wegen und nicht aus Massen und Geschwindigkeiten gleich seien.

Das sucht nun Leibnitz auf folgende Weise zu zeigen:

„Wir wollen annehmen, eine Kugel von 4 Pfd. falle aus einer Höhe von 1′ über die geneigte Fläche $A_1$ $A_2$ bis sie in die Horizontalebene EF kommt und dort von $A_2$ nach $A_3$ läuft, nachdem sie während des Falles einen Grad Geschwindigkeit erlangt hat. Ferner möge in derselben Ebene eine andere Kugel B von 1 Pfd. in $B_1$ liegen. Ferner sei angenommen, es müsse alle Kraft von A auf B übergehen, so dass wenn A an die Stelle $A_3$ kommt, sich B allein bewege. Es handelt sich dann darum, welche Geschwindigkeit B empfangen müsse, um eben so viel Kraft zu haben als A hatte. Die Cartesianer werden sagen die Kugel B, viermal kleiner als A, müsse eine Geschwindigkeit von 4 Grad haben; dann wird A mit 4 Pfd. und der Geschwindigkeit 1 ebenso viel Kraft haben als B mit 1 Pfd. und 4 Graden Geschwin-

digkeit. Ich aber werde zeigen, dass aus einer solchen Vertauschung eine perpetuierliche Bewegung entstehen würde, was unmöglich ist. Der Körper B von 1 Pfd. wird mit der Geschwindigkeit 4 von $B_1$ nach $B_2$ und dann auf der Curve $B_2$ $B_3$ in aufsteigender Richtung bis nach $B_3$ kommen und zwar bis zu einer senkrechten Höhe von 16′, weil ja A eine Geschwindigkeit 1 erlangt hatte, als er aus der Höhe von 1′ herabfiel und deshalb wieder zu einer Höhe von 1′ aufsteigen konnte. Also kann mit dem vierfachen Geschwindigkeitsgrade bis zu einer Höhe von 16′ angestiegen werden. Aber daraus wird sich eine perpetuierliche Bewegung ergeben, oder der Effekt wird grösser sein als die Ursache. Denn die Kugel B von 1 Pfd. erhoben auf 16′ soll von uns ferner so angewandt werden, dass sie wieder zurückfalle in die Horizontalebene nach $B_4$ und dabei mit Hilfe einer einfachen Maschine, etwa eines geraden Balkens, die Kugel A von 4 Pfd. zu einer Höhe von 4′ heben könne. Es sei der Balken $A_3$ $B_3$ im Stützpunkte in Arme von gleichem Gewichte aber ungleicher Länge geteilt, so dass $CB_3$ etwas mehr als viermal grösser ist, wie $CA_3$. Dann wird die Kugel B auf $B_3$ wirkend die Kugel A in $A_3$ überwinden und in die Höhe heben zu etwas weniger als 4′, übrigens mit einem so kleinen Unterschiede, als man nur will. In der Praxis genügt es schon, die Kugel A zu einer Höhe von nur 3′ zu heben, oder noch weniger. Und das ist doch ein Unsinn. Anfangs war nämlich A bloss bis zur Höhe von 1′ gehoben solange B im Horizonte lag, nun da B in seine Anfangslage zurückgekehrt ist, ist A bis zu einer Höhe von fast 4′ gestiegen und das durch ihre eigene Kraft, wenn auch mit Hilfe der Kugel B, von der aber vorausgesetzt war, dass sie keine neue Kraft mitteile. Wir hätten also aus Nichts beinahe das Dreifache an Kraft gewonnen. Man könnte dann auch leicht eine perpetuierliche Bewegung erhalten; man dürfte nur die Kugel A von $A_4$ nach $A_1$ überführen und vorher auf dem

Wege, da sie ja einen Fall von 3′ erleidet, irgend eine mechanische Arbeit leisten lassen. Auf ähnliche Weise würde B, wenn der Ort $B_4$ etwas höher als der Horizont angenommen wird, unterdessen nach $B_1$ zurückkehren und so fort.

Die Gleichheit von Ursache und Wirkung wird uns die wahren Gesetze der Uebertragung der Bewegungen lehren. Man muss sagen: Wenn B mit 1 Pfd. die volle Kraft von A mit 4 Pfd. annehmen sollte, so muss B die doppelte Geschwindigkeit erlangen von der, welche A hatte. Also wird B nur zu einer Höhe von 4′ aufsteigen können und A nur zu einer Höhe von 1′ zurückgeführt werden mit Hilfe des oben erwähnten Balkens und es wird also der Effekt nicht grösser werden wie die Ursache. Daraus ergibt sich aber auch gegen die Ansicht der Cartesianer, dass nicht immer die gleiche Bewegungsgrösse erhalten bleibt; während nämlich A mit 4 Pfd. die Geschwindigkeit 1 hatte, hat B mit 1 Pfd. die Geschwindigkeit 2, d. h. die Bewegungsgrösse ist um die Hälfte kleiner geworden. Es gibt aber auch Fälle, in denen die Bewegungsgrösse vermehrt wird. Es ist also zwischen den Bewegungsgrössen und den von uns definierten Kraftgrössen ein Unterschied, und es kann also der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgrössen nicht beibehalten werden.

Hat ganz allgemein der Körper A die Anfangsgeschwindigkeit e, B aber y und nach der Aktion A die Geschwindigkeit $e'$ B aber $y'$, seien ferner die Höhen, zu welchen A und B vor der Aktion aufsteigen konnten x und z, nach derselben $x'$ und $z'$, so muss, behaupte ich,

$$Ax + Bz = Ax' + Bz'$$

sein, damit die gleiche Kraft erhalten bleibe, woraus notwendig folgt, dass nicht immer

$$Ae + By = Ae' + By'$$

sein muss, oder dass nicht immer die gleiche Bewegungsgrösse erhalten bleiben muss.

Es erübrigt nur noch, mit kurzen Worten die Quelle des Irrtums zu zeigen: Ich habe bewiesen, dass die bewegende Kraft nicht nach den Geschwindigkeitsgraden zu messen sei. Aber die meisten Gelehrten hat das Vorurteil, das sie aus der Schule mitgenommen haben, getäuscht, wo man Bewegung und Geschwindigkeit gleichsam als eine reelle und absolute Sache an den Dingen auffasst; deshalb scheint es ihnen selbst wunderbar, dass die Bewegungsgrösse ohne ein Wunder Gottes vermehrt oder vermindert werden kann. Aber die bewegende Kraft selbst ist etwas Absolutes und Feststehendes, für dessen Grösse die Natur nicht zu sorgen braucht. Und wenn es auch auf den ersten Anblick scheint, als werde mit Verdopplung der Geschwindigkeit eines Körpers auch seine Kraft verdoppelt, so ist das nicht richtig; erst dann wird das, was zuerst da war, genau verdoppelt, wenn ich dem Körper A mit der Geschwindigkeit 1 einen gleich grossen mit der nämlichen Geschwindigkeit beifüge. Wie aber eine Vermehrung der Kraft stattfindet ohne Vermehrung des Körpers, das zeigt obige Methode. Einige meinten auch, man müsse bei Schätzung der Kräfte auf die Zeit Rücksicht nehmen. Und das ist in der That richtig bei Erzeugung derjenigen Wirkungen, bei welchen die nämliche Kraft in längerer Zeit eine grössere Wirkung hervorbringt, wie es z. B. der Fall ist, wenn eine Kugel bei gegebener Geschwindigkeit die Kraft hat, ihr Gewicht in der Horizontalebene in gegebener Zeit eine gegebene Strecke zu tragen. Aber das ist bei den Kräften, von welchen hier die Rede ist, anders, wo die Kraft im Wirken verzehrt wird, und wo das, was mit Kraft ausgestattet ist, wie ein zu einem gewissen Grade gespannter Bogen, wenn er ein gegebenes Gewicht zu einer bestimmten Höhe zu heben vermag, durch nichts im Stande ist, dasselbe noch höher zu heben, welche Zeit man ihm auch geben mag. Da nämlich ein Gewicht aus einer Höhe fallend eben die Kraft

wieder erzeugen kann, welche es gehoben hat, so könnte abgesehen von den Widerständen ein höher gehobenes Gewicht in einer beliebigen Zeit durch seinen Fall zu seiner ersten Kraft noch etwas dazu erzeugen, was ja unmöglich ist.“

Der eben angeführte Beweis — mag auch seine Richtigkeit durch den Scharfsinn eines Kant später geleugnet worden sein — hat Leibnitz unter seinen Zeitgenossen ohne Zweifel eine grosse Anzahl von Anhängern seines Maſses erobert; denn wer könnte bestreiten, dass er auf den ersten Anblick etwas scheinbar mit Gewalt Ueberzeugendes an sich hat?

XI. Auch Papin zweifelte nicht an der Richtigkeit der im angeführten Beispiele erwähnten Thatsachen; nur suchte er aus denselben gerade einen Beweis für die Richtigkeit des cartesianischen Maſses zu liefern. Näheres findet sich in seiner in den Act. erud. im Januar 1691 publicierten Schrift: Mechanicorum de viribus motricibus sententia assenta a D. Papino adversus G. G. L. objectiones. Was Leibnitzens Einwurf gegen die Annahme der unendlich grossen Geschwindigkeit des die Schwere verursachenden Aethers betrifft, so verweist er einfach auf Huyghens' Schrift de causa gravitatis, worin die Zweifel, welche Leibnitz und Bernoulli gegen diese Theorie erhoben hatten, widerlegt seien und geht dann auf den Streit bezüglich des Maſses der Kräfte über.

Nach gemeinsamer Ansicht werde die Grösse einer Kraft durch die Grösse des Effektes gemessen. Von zwei in Bewegung befindlichen Körpern habe demnach derjenige die grössere Kraft, welcher mehr Effekt hervorbringen könne. Als gesetzmässiges Maſs der Kraft sei aber nicht die Grösse des von dem Körper durchlaufenen Weges noch auch die Zeit zu nehmen, während deren sich der Körper bewege, sondern der Widerstand, welcher überwunden werden müsse,

Das ergebe sich daraus, dass man in der Mechanik annehme, dass beliebig grosse Räume horizontal durchlaufen werden und dass eine horizontale Bewegung Jahrhunderte lang dauern könne, ohne dass die Kraft sich vermindere, wenn kein Widerstand überwunden werden müsse. Also könne man die obige Definition der Kraft dahin umändern, dass man sage, diejenige sei die grössere Kraft, welche mehr Hindernisse überwinden könne. Unter dieser Voraussetzung sei es dann ein Leichtes zu zeigen, dass die Grösse der Kraft durch die Grösse der Bewegung im Sinne Descartes zu messen sei und zwar gerade mit Hilfe des von Leibnitz angegebenen Beispieles.

Wenn die Kugel A all ihre Kraft auf B übertrage, so müsse diese die Geschwindigkeit 4 erlangen, damit die Kräfte gleich seien. Wenn nämlich der Körper A mit der Geschwindigkeit 1 in einer Horizontalebene in der Zeit 1 hätte aufsteigen können, so hätte sicher B in der Zeit 4 diese Grösse des Widerstandes überwunden wie A in der Zeit 1. Da also mit den erwähnten Geschwindigkeitsgraden keiner von den Körpern mehr Widerstand überwinden könne als der andere, so seien ihre Kräfte gleich. Es sei nämlich bekannt, dass die Grösse des Widerstandes hier nicht aus der Grösse des durchlaufenen Weges entstehe, sondern infolge der Drucke der Schwere, welche nach unten wirke. Da aber die Geschwindigkeit jener Drucke für unendlich gehalten werde, so folge bestimmt, dass die Drucke auf B in 4 Zeiteinheiten 4mal so viele sein werden, als auf A in der Zeit 1. Umgekehrt seien aber die Drucke auf A = 4 Pfd. 4mal stärker als auf B = 1 Pfd., so dass also die Zahl durch die Stärke völlig compensiert werde. Wäre aber nach Leibnitzens Ansicht die kleinere Geschwindigkeit auf B übergegangen, so hätte diese den grossen Widerstand nicht überwinden können und die Kräfte beider Kugeln wären dann nicht gleich.

Aber Papin sucht die Unmöglichkeit des Leibnitzschen Beweises noch von einer anderen Seite zu zeigen.

Leibnitz habe in seiner Abhandlung gesagt, die Ansicht der Cartesianer sei deshalb falsch, weil sich daraus die Möglichkeit einer perpetuierlichen Bewegung ableiten lasse, die doch nach Ansicht Aller unmöglich sei und er habe dies dadurch gezeigt, dass er die ganze Kraft des Körpers A auf B übertragen lasse. Die Möglichkeit dieser vollen Uebertragung der Kraft müsse er (Papin) nun bestreiten; dann sei es natürlich auch unmöglich die Cartesianer in der von Leibnitz geübten Weise ad absurdum zu führen, es müsste denn sein, dass Leibnitz die Möglichkeit einer solchen Kraftübertragung in der Natur nachweise oder mindestens aus der Lehre seiner Gegner folgern könne. Ihm genüge es, wenn Leibnitz zeigen könne, wie die ganze bewegende Kraft ohne Wunder vom grösseren bewegten auf den kleineren ruhenden Körper übergehen könne.

Um übrigens seinem Gegner Gelegenheit zum Kampfe zu geben, wolle er in einem Beispiele zeigen, wie er sich zur Vertheidigung anschicke:

Gesetzt sein Gegner sage, die ganze bewegende Kraft werde aus A = 4 Pfd. auf B = 1 Pfd. übertragen; man möge nur einen Hebel EB anwenden mit dem Stützpunkte C; A greife in E an, B in B und CB sei gleich 4CE; wenn dann der Körper A in E angreife, und B in B, so müsste dieser das nämliche leisten wie der Körper von 4 Pfd. in E ohne Hebel; der Körper von 4 Pfd. in E könnte die ganze Kraft des A aufnehmen; also müsste auch der Körper von 1 Pfd. in B die nämliche Kraft aufnehmen, — wenn das sein Gegner sagen sollte, so werde er erwidern, der Körper von 1 Pfd. in B könne nicht dasselbe leisten wie der von 4 Pfd. in E; während nämlich der Körper in B ruhe und A auf E stosse, wirke die Kraft des A nicht bloss gegen B, sondern auch gegen den Stützpunkt C und zwar um so

heftiger als $CE < CB$ sei. Und wenn Einer dagegen sage, C sei ja fest, so sage er, es gebe nichts Festes; denn ganz fest stehe der Satz Huyghens', dass ein jeder Körper, sei er noch so klein, sobald er auf einen ruhenden stosse, diesem irgend eine Bewegung mitteile. Mit diesem Kunstgriffe könne man also die Uebertragung der Kraft von A auf B nicht beweisen.

Und wollte man annehmen der Körper A treffe den Hebel auf der andern Seite des Stützpunktes in D, so sage er, in diesem Falle treibe der Körper B auf die entgegengesetzte Seite durch den Stützpunkt C und diese Reaktion werde um so mehr in A aufgenommen, je kleiner DC ist als BC; also auch so komme man nicht zum Ziele.

Man könne noch einen anderen Grund angeben, in folge dessen nach Ansicht der Cartesianer eine fortwährende Bewegung erreicht werden zu können scheine auch ohne jenen Druck, welchen der Stützpunkt empfängt. Es werde nämlich der Hebel CB bis nach F verlängert, so dass $CF = 2\,CB$ und statt in B 1 Pfd. an F $^{1}/_{2}$ Pfd. aufgehängt; dann bleibe die Wirkung die gleiche und auch der Druck in C der nämliche. Denn es stehe nichts entgegen, dass die übrige Kraft welche auf B übergehen sollte, auf F übergehe. Indem man nun den Hebel weiter verlängere und im selben Verhältnisse kleinere Massen anhänge, werde dieselbe Kraft auf kleinere Körper übertragen. Wenn also Kraft und Bewegung dasselbe wären, müsste in den kleineren Körpern die Geschwindigkeit im nämlichen Verhältnisse wachsen, als ihre Masse abnehme; die Grösse des Aufsteigens würde aber im Quadrate der Geschwindigkeit vermehrt und so könnten die erwähnten Körper leicht zu einer solchen Höhe gebracht werden, dass da der Abnahme der Massen nichts entgegensteht, die Möglichkeit einer fortwährenden Bewegung gegeben wäre nach Leibnitz. Darauf antworte er (Papin), dass sich die Kraft dieses Beweises nicht leugnen lasse, wenn man annehme, dass der

Hebel völlig hart und starr sei, so dass die bewegende Kraft ebenso leicht auf ferne, wie auf nahe liegende Teile übertragen werden könne; aber es gebe in der Natur keine solche Festigkeit und Hebel aus irgend welchem Materiale erlitten immer einen Grad der Spannung, der dem zu überwindenden Widerstande proportional sei. Wenn also für den grösseren Körper B ein kleinerer F in weiterer Entfernung angenommen werde, so werde dieser einen um so kleineren Teil der Kraft des A erlangen, je grösser seine Entfernung sei; also könne dieselbe Kraft nicht auf immer kleinere und kleinere Körper übertragen werden.

X. Noch im nämlichen Jahre 1691 und zwar im September erschien in den act. erud. Leibnitzens Antwort auf Papins Bemerkungen in dem Aufsatze de legibus naturae et vera aestimatione virium motricium contra Cartesianos. Nachdem er eine kurze Geschichte seines Streites mit Papin vorausgeschickt, fährt er fort:

„Papin gibt zu, dass eine fortwährende Bewegung entstehen müsse, wenn eine Kugel von 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1 ihre ganze Geschwindigkeit übertragen könnte auf eine Kugel von 1 Pfd.; aber er sagt, das könne eben nicht geschehen. Von der Art und Weise, wie man das bewirken kann, später; nun aber will ich zeigen, dass zur Kraft meines Beweises dies Alles gar nicht nötig ist. Mir war es nämlich genügend gezeigt zu haben, dass 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1 und 1 Pfd. mit der Geschwindigkeit 4 nicht von gleicher Kraft sein können, da durch Vertauschung derselben eine perpetuierliche Bewegung entstehe müsste. Wenn aber Einer meine Definition von gleichen und ungleichen Kräften leugnen wollte, so will ich nur das fragen, ob nicht die Natur selbst sie bewahrheite oder ob sie sich nicht hüte, irgend einmal eine Substitution der Art vorzunehmen, dass durch sie eine perpetuierliche Bewegung entstehen könnte. Experimente beweisen dies und kein Beispiel

für das Gegenteil gibt es. Das zugegeben habe ich gar nicht nötig, dass die ganze Kraft eines grösseren Körpers auf einen kleineren übergehe. Mir genügt es z. B., dass die ganze Kraft eines kleineren auf einen grösseren übergehe. Wenn also die ganze Kraft von 1 Pfd. mit der Geschwindigkeit 4 übergehen kann auf einen Körper von 4 Pfd. und dieser nach der gewöhnlichen Ansicht die Geschwindigkeit 1 erlangen muss, dann wird man auf den Unsinn kommen, dass eines für das andere gesetzt werden könne von Dingen, von welchen man das andere wieder für das eine setzen könnte, ohne dass eine perpetuierliche Bewegung entstehen müsste. Wollten wir aber annehmen, dass ein Teil der Kraft zurückbliebe, der andere aber übertragen würde, so dürften wir in denselben Unsinn verfallen.

Es gibt aber vielleicht solche, welche überhaupt die Gleichheit von Ursache und Wirkung negieren oder welche wenigstens sagen, der Effekt könne zwar nicht grösser, wohl aber kleiner wie die Ursache sein. Daraus würde aber folgen, dass sich die Ursache durch ihren Effekt nicht wiederherstellen lasse und man sieht leicht ein, wie sehr dies der Natur und dem Wesen der Frage widerspreche. Die Natur müsste dann fortwährend zurückgehen und könnte das Verlorene ohne Wunder nie wieder erlangen.

Ich appelliere an das Urteil des Herrn Papin selbst, ob es mit der Vernunft übereinstimmend erscheint, dass wir statt einer Kraft, welche 1 Pfd. auf 16′ erhebt, eine Kraft setzen könnten, welche 1 Pfd. auf 4′ hebt und dass das Uebrige der Kraft spurlos verloren ginge, ohne irgend einen Nutzen gebracht zu haben. Und das müsste eintreten, wenn man an die Stelle von 1 Pfd. mit der Geschwindigkeit 4 setzen könnte 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1. Ja, wollte man 1 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1000 ersetzen durch 1000 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1, wie es gewöhnlich geschieht, so würde der Effekt um den tausendsten Teil vermindert, was

doch ganz absurd erscheint. Also ist auch die cartesianische Gleichung $Ae + By = Ae' + By'$ unsinnig.

Ich müsste mich wundern, wenn Herrn Papin nicht Zweifel aufgestiegen wären, ob man nicht ohne allen Grund etwas Mögliches zu leugnen sucht, d. h. ob man nicht der Natur die Fähigkeit nehmen wollte, sei es mittelbar oder unmittelbar die ganze Kraft eines grösseren Körpers auf einen kleineren zu übertragen. Sollte dies aber doch jemand nicht zugeben wollen, so will ich versuchen, einen Modus anzugeben wie die Natur die Kraft eines grösseren Körpers auf einen kleineren, ruhenden übertragen könnte. Gibt man zu, dass die ganze Kraft eines kleineren Körpers auf einen grösseren übertragen werden kann, so wollen wir den grösseren, in Bewegung befindlichen A in Teile teilen, welche kleiner sind als B selbst, der in Ruhe bleiben möge, und die ganze Geschwindigkeit des A beibehalten, dann wird, wenn wir die Kraft eines jeden solchen Teiles auf B übertragen, die ganze Kraft des A auf B übertragen werden. Man kann den Beweis auch anders führen: A und B seien durch eine starre Stange von hinreichender Länge verbunden, auf ihr ein Punkt H angenommen, der so liege, dass eine drehende Bewegung entstehen und die dabei erlangte Geschwindigkeit des A beliebig klein werden möge. Dann kann A gleichsam als ruhend betrachtet werden und seine ganze Kraft wird, wenn man die Verbindung löst, auf B übergegangen sein."

Damit war der eine Einwurf, welchen Papin gemacht hatte, widerlegt und was den anderen betrifft, dass es in der Natur keine absolute Festigkeit gebe, so meint Leibnitz, es würde zur Wirksamkeit des von Papin selbst angeführten Beweises zu seinen Gunsten schon genügen, wenn nur völlig feste Körper nicht unmöglich wären, sollten sie auch wirklich gar nicht vorhanden sein. Weil aber elastische Körper die gleichen Wirkungen hervorbrächten und dasselbe leisteten, wie feste, mit einem so kleinen Unterschiede als

man nur wolle, so werde man den Unterschied zwischen einem völlig festen und einem in der Natur existierenden so klein machen können als möglich; dann aber bleibe der Beweis in voller Kraft. Herr Papin hatte sich also mit seinem eigenen Beweise geschlagen, nachdem Leibnitz die beiden Hindernisse, welche der Richtigkeit desselben entgegenstanden, siegreich beseitigt hatte.

Aber auch der von Papin aufgestellten Behauptung, dass weil gleiche Kräfte diejenigen seien, welche gleiche Hindernisse überwinden, ein Körper von 4 Pfd. mit der Geschwindigkeit 1 die nämliche Kraft habe wie ein solcher von 1 Pfd. mit der Geschwindigkeit 4, tritt Leibnitz entgegen. Er müsse in Papins (eben mitgeteiltem) Beweise der Behauptung widersprechen, dass, was die gleiche Zahl von Eindrücken der Schwere überwinden könne, auch gleichen Widerstand besiege, indem er (L.) den Widerstand auffasse als eine Grösse anderer Art als die Kraft der Schwere. Denn in dieser Behauptung sei gerade das enthalten, was in Frage stehe; da nämlich der Druck der Schwere nichts anderes sei, als ein Grad von Geschwindigkeit, welche einem beliebigen Teile mitgeteilt werde, so würde er, wenn er zugäbe, dass der Widerstand oder die entgegenstehende Kraft durch diesen Druck gemessen werde, zugeben, dass man die Kraft messen müsse mit dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeit und das hiesse doch geradezu ins feindliche Lager übergehen.

Freilich einen Beweis gegen die Richtigkeit der Papin'schen Behauptung wird man das unmittelbar nicht nennen können; aber nachdem Leibnitz schon anderweitig die Richtigkeit seines Theorems nachgewiesen hatte, mag man es ja gelten lassen, wenn er einfach sagt: von meinem Standpunkte aus kann diese Annahme Papins nicht gelten; denn sie zugeben würde ja heissen mir selbst widersprechen.

XI. Von grossem Interesse sind die metaphysischen Bemerkungen, welche Leibnitz in dieser Arbeit macht.

„Ich schätze die Grösse des Widerstandes oder des Effektes, bemerkt er, nicht nach den Geschwindigkeitsgraden, d. h. nach modalen Dingen, welche nicht vollständig sind, sondern nach substantiellen, absoluten Dingen und ich glaube in der Vernachlässigung dieses Umstandes besteht der erste Irrtum meiner Gegenpartei und ich meine, dass an Kräften gleich ist, was eine gleiche Zahl von gleichen Federn durch seine Kraft zu demselben Grade von Spannung bringen kann oder was dieselbe Zahl von Pfunden zur nämlichen Höhe heben kann, oder, um von der concreten Physik zur reinen Mechanik überzugehen, was der gleichen Zahl von Körpern die gleiche Geschwindigkeit mitteilen kann, oder endlich dasjenige, was ein beliebiges mit Kräften ausgestattetes Ding mit der gleichen Zahl von Kräften wiederherstellen kann. Und sind zwei Dinge an Kräften ungleich, dann meine ich, findet ein solches Verhältnis zwischen den Kräften statt, wie es zwischen den Teilen eines Mafses besteht, z. B. zwischen den Zahlen gleicher Federn und den Gewichten, durch die sie gleichmässig gespannt werden, oder zwischen den Zahlen gleicher Körper, die von ihnen gleiche Geschwindigkeit erlangen. Durch diese Art zu messen lassen sich die Kräfte auf ein Mafs zurückführen, das sich immer gleich bleibt und nur wiederholt werden darf und es wird sich ergeben, dass die Schätzung, welche nach einem beliebigen Mafse gemacht wurde, auch nach irgend einem anderen Mafse sich ergibt. Andern Falles gibt es in der Natur kein Gesetz. Das ergibt sich aber nicht, es kämpft vielmehr gegen sich bei der Schätzung nach Geschwindigkeitsgraden, von der ich gezeigt habe, dass sie mit anderen unter sich übereinstimmenden Arten zu messen, unmöglich übereinstimme; der wahre und tiefste Grund besteht darin, dass man so, genau gesprochen, gar kein wahres und reelles Mafs anwendet. Mag ich nämlich auch zugeben, dass drei gleiche und gleich schwere Körper genau dreimal so viel Kraft haben als einer derselben, weil ein und dasselbe

Mafs dreimal wiederholt wird, so räume ich deswegen doch noch nicht ein, dass ein Körper, der 3 Geschwindigkeitsgrade hat, dreimal einen sich gleichen Körper enthalte mit der Geschwindigkeit 1 und deshalb die dreifache Kraft besitze; denn mag er auch dreimal den Geschwindigkeitsgrad besitzen, so hat er deshalb doch nicht auch dreimal die Grösse des Körpers, sondern nur einmal. Daraus ergibt sich, dass die Geschwindigkeit durch mich von der Aufgabe die Kraft zu messen nicht ausgeschlossen wird. Ich zeige nämlich, dass, was auch zu ihrer Bestimmung beigebracht wird, wie eine Feder von gegebener Spannung, ein Gewicht von gegebener Grösse und Erhebung, ein Körper von gegebener Masse und Geschwindigkeit von dem Effekte ebenso geleistet werden kann, wie von der Ursache und umgekehrt. Und wenn ich auch ein beliebiges reelles Mafs für die Kräfte annehme, so finde ich doch mit den übrigen eine Uebereinstimmung. Sobald aber nur ein modales Mafs angewendet wird, z. B. der Grad von Geschwindigkeit, welcher wieder hergestellt werden muss ohne eine Wiederherstellung des Körpers, kommen wir zu Absurditäten und verlieren oder gewinnen einen Teil der Kraft.

XII. Ich glaube, es ist hier nicht bloss aus chronologischen, sondern auch aus sachlichen Gründen der Platz für eine Arbeit, deren Lieferung Leibnitz schon früher versprochen und die er leider wider sein Versprechen nicht vollendet hat; ich meine sein berühmtes specimen dynamicum, welches in den act. erud. Lips. im April 1695 erschien. Es kann mir natürlich nicht in den Sinn kommen, diese Arbeit wortwörtlich mitzuteilen; aber ich halte es zum richtigen Verständnisse der Geschichte des Kampfes um das Mafs der lebendigen Kräfte für unentbehrlich, die Hauptgedanken hier anzuführen.

Leibnitz meint, in den körperlichen Dingen sei noch etwas ausser der Extension, ja sogar noch vor ihr, nämlich

eine Kraft, welche nicht in einer bloss passiven Fähigkeit bestehe, sondern überdies noch mit einem aktiven Versuche, mit einem Bestreben ausgerüstet sei, den vollen Effekt erreichen zu wollen, wenn sie nicht durch ein entgegenstehendes Streben daran gehindert werde. Dieses Bestreben trete weit und breit den Sinnen entgegen und werde von der Vernunft auch da noch erkannt, wo es den Sinnen nicht mehr zugänglich sei. Diese Kraft mache die innerste Natur der Körper aus, wenn es der Charakter der Substanzen sei zu wirken und Extension nichts anderes heisse als Zusammenhang oder Ausdehnung einer von vornherein gegebenen Widerstand leistenden Substanz, welche Ausdehnung unmöglich eine Substanz hervorbringen könne. Und es mache keinen Eintrag, dass jede körperliche Aktion von der Bewegung stamme und Bewegung selbst nicht sein könne ausser durch Bewegung, sei es, dass sie im Körper schon vorhanden sei oder ihm von aussen mitgeteilt werde. Denn Bewegung existiere an sich gerade so wenig wie die Zeit, weil ein Ganzes nie existiere, wenn nicht gleichzeitig seine Teile existierten. Und es gebe nichts Reelles in ihr als jenes Momentane, das in der zur Aenderung strebenden Kraft sich bilden müsse. Dahin also kehre Alles zurück, was in der Natur sei ausser dem geometrischen Objekt oder der Extension.

Zweifach aber sei die aktive Kraft, die man nicht unrichtig mit virtus bezeichnen könne, nämlich entweder primitiv — und diese sei in jeder Substanz an und für sich enthalten oder deriviert — und diese werde gleichsam durch eine Begrenzung der primitiven aus dem gegenseitigen Stosse der Körper hervorgehend auf verschiedene Weise ausgeübt. Auf ähnliche Weise sei jede passive Kraft zweifach, primitiv oder abgeleitet.

Unter einer abgeleiteten Kraft, durch welche die Körper gegenseitig auf sich wirken, sei nichts anderes verstanden

als diejenige, welche einer Bewegung anhafte und zu einer ferneren Erzeugung einer lokalen Bewegung antreibe. Bewegung sei eine fortwährende Ortsänderung und bedürfe deshalb der Zeit. Ein Bewegliches, das in Bewegung sei, habe in jedem Momente eine Geschwindigkeit. Geschwindigkeit in Verbindung mit einer Richtung nenne er einen conatus. Impetus aber sei das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, also das, was die Cartesianer Bewegungsgrösse zu nennen pflegten, nämlich eine momentane, wiewohl genauer gesprochen die Bewegungsgrösse selbst, da sie ja in der Zeit existiere, aus dem Aggregat der Stösse, welche mit der Zeitdauer im Beweglichen entstehen, mit der Zeit multipliciert bestehe. Er wolle übrigens die Redeweise seiner Gegner gerade weil er mit ihnen im Streite liege, beibehalten. Ja wie man einen gegenwärtigen Fall von einem bereits geschehenen unterscheide, so könnte man auch das momentane Element der Bewegung von der Bewegung selbst, welche während einer Zeit geschehe, unterscheiden und eine Motion nennen und so werde eine Motionsgrösse genannt werden, was gewöhnlich der Bewegung mitgeteilt werde.

Wie ferner die Schätzung einer Bewegung während eines Zeitabschnittes durch eine Unzahl von Stössen geschehe, so bestehe auch der Stoss aus einer Unzahl von Graden, die allmählich demselben Beweglichen mitgeteilt würden und habe ein gewisses Element, durch dessen unendlich oftmalige Wiederholung er entstehen könne. Es gebe demnach ein zweifaches Streben (nisus) ein elementares, unmerklich kleines und dieses wolle er einen Antrieb (sollicitatio) nennen und ein endliches mit der Zeit entstehendes und das sei Stoss (impetus) selbst. Daher gebe es auch eine doppelte Kraft: eine elementare, welche er tote Kraft nennen wolle, weil bei ihr keine wirkliche Bewegung sondern bloss ein Bestreben zur Bewegung entstehe; die andere aber sei mit wirklicher Bewegung verbunden und diese nenne er lebendige Kraft.

Die lebendige Kraft könne in irgend einem Aggregate von Körpern zweifach aufgefasst werden: total oder partiell und die partielle wieder respektiv oder direktiv, d. h. entweder bloss in den Teilen vorhanden oder allgemein. Respektive sei sie, wenn ein Aggregat von Körpern gegen sich selbst wirke, direktiv, wenn sie ausser gegen sich selbst auch nach aussen wirken könne; direktiv aber nenne er sie deshalb, weil die ganze Kraft der Richtung in dieser partiellen Kraft erhalten bleibe. Sie würde aber allein zurückbleiben, wenn plötzlich das Aggregat durch eine Bewegung der Teilchen unter sich erstarrte. Deshalb setze sich aus der respektiven und direktiven Kraft zugleich die absolute totale Kraft zusammen.

„Die Alten, fährt er fort, hatten nur von der toten Kraft Kenntnis, wie sie beim Hebel, der Schraube etc. vorkommt, wo nur von dem ersten Versuche der Körper gegen einander die Rede ist, bevor sie noch durch Wirkung einen Stoss erhalten haben. Und mag man auch die Gesetze der toten Kräfte in gewisser Art auf die lebendigen übertragen dürfen, so muss man dabei doch sehr vorsichtig zu Werke gehen, wie sich z. B. diejenigen täuschen liessen, welche die Kraft im Allgemeinen mit der Grösse, welche man durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit erhält, vermengten, weil sie wussten, dass die tote Kraft in diesem Verhältnisse zusammengesetzt sei. Das trifft aber bei diesen nur zufällig zu, weil nämlich beim Falle schwerer Körper im Anfange der Bewegung der Fallraum selbst oder die Grössen der im Falle durchlaufenen Wege, da sie ja unendlich klein und elementar sind und die Geschwindigkeiten oder die Versuche zu fallen, proportional sind. Wenn aber einmal lebendige Kraft entstanden ist, dann sind die erlangten Geschwindigkeiten nicht mehr den durchlaufenen Wegen proportional. Galilei fing schon an von den lebendigen Kräften, allerdings unter anderem Namen zu handeln und hat zuerst

erklärt, wie durch die Beschleunigung schwerer fallender Dinge Bewegung entstehe. Cartesius hat richtig unterschieden zwischen Geschwindigkeit und Richtung und bemerkt, dass beim Stosse zweier Körper wenigstens erstere sich ändere. Aber er hat die sehr kleine Aenderung nicht richtig geschätzt, indem er nämlich bloss die Richtung oder bloss die Geschwindigkeit änderte, während doch eine Aenderung aus dem Verhältnisse beider herzustellen ist. Honoratius Fabri, Marcus Marci, J. A. Borelli, Ign. Bapt. Pardies, Claud de Chales und Andere haben in der Lehre von der Bewegung Beachtenswertes geleistet, aber gewaltige Irrtümer begangen. Zuerst scheint mir auch bei dieser Sache Huyghens auf die reine und klare Wahrheit gekommen zu sein und diese Lehre von Widersprüchen befreit zu haben und gewisse Gesetze aufgestellt zu haben, die auch von Wrennus, Wallisius und Mariott anerkannt wurden. Aber über die Ursachen besteht nicht immer dieselbe Meinung, weshalb auch diese Männer nicht immer zu denselben Schlüssen kommen. Deshalb waren auch die wahren Quellen dieser Wissenschaft noch nicht erschlossen. Und es wurde auch von Allen nicht erkannt, was ich wenigstens meine, dass nämlich der Rückschlag nur von einer elastischen Kraft herkomme. Auch hat Keiner vor mir die Kenntnis der lebendigen Kraft gelehrt. Und das hat die Cartesianer und Andere bisher am meisten irre geführt, dass sie meinten, die Summe der Bewegungen oder der Stösse könne nach dem Znsammentreffen der Körper auch eine andere sein, als vor demselben und dass sie deshalb glaubten, die Grösse der Kraft könne sich ändern.“

In seinem Buche hypothesis physica, in welchem er noch als junger Mann die Natur der Körper mit Demokrit, Gassendus und Cartesius aus der trägen Masse konstruierte und eine Theorie der Bewegung gab, behauptete Leibnitz schon, dass, wenn man eine solche Kenntnis eines Körpers

annehme, der stossende Körper sein Streben (conatus) an den empfangenden, direkt widerstehenden abgeben müsse. Deshalb müsse die Bewegung des empfangenden aus seiner eigenen früheren und der neuen empfangenen zusammengesetzt sein. Dort bewies er auch, dass, wenn bloss die mathematische Kenntnis des Körpers, Grösse, Figur, Art und deren Veränderung oder im Momente des Stosses selbst der Versuch, eine Aenderung hervorzubringen, erkannt würde, wenn man keine Rücksicht nehme auf die metaphysische Kenntnis der treibenden Kraft und auf die Trägheit in der Materie und wenn deshalb der Erfolg eines Stosses durch eine bloss geometrische Zusammensetzung der Versuche bestimmt sei, dass dann notwendig der ganze Versuch auch des kleinsten stossenden Körpers dem empfangenden, möge er auch noch so gross sein, mitgeteilt werde und dass in diesem Falle der grösste ruhende Körper von dem kleinsten stossenden ohne Rückschlag mit fortgerissen werde, da ja bei solcher Constitution der Materie kein Widerstand gegen Bewegung sondern völlige Indifferenz vorhanden sei. Es gäbe also eine Aktion ohne Reaktion und überhaupt kein Mafs der Kraft, da ja jedes Beliebige von jedem Beliebigen geleistet werden könne. Da aber dies der Ordnung der Dinge völlig widerspreche, so meinte er schon damals, dass der Schöpfer beim Aufbau der Dinge vermieden habe, was an und für sich nach den Gesetzen der Bewegung, die der reinen Geometrie entnommen sind, folgen würde.

Später bemerkte er, dass jene erste Hypothese des Körperlichen nicht vollständig sei und suchte dies insbesondere dadurch darzuthun, dass im Körper ausser seiner Grösse und der Undurchdringlichkeit etwas liegen müsse, woraus die Erkenntnis der Kraft entstehe. Und wenn man die metaphysischen Gesetze dieses Etwas mit denen der Extension verbinde, so ergäben sich gerade jene Regeln der Bewegung, welche er systematische genannt habe, dass nämlich jede Aenderung

schrittweise geschehe, jede Wirkung mit Gegenwirkung verbunden sei und keine neue Kraft entstehe ohne Verlust einer anderen. Und da diese Gesetze sich nicht aus dem Begriffe der Masse ableiten liessen, so müssten sie notwendig aus etwas Anderem folgen, was den Körpern inne wohne, aus der Kraft, welche immer ihre Grösse erhalte.

Zur wahren Schätzung der Kräfte, gibt er an, sei er auf verschiedenen Wegen gekommen; a priori durch die einfachste Betrachtung von Raum, Zeit und Kraft, a posteriori durch die Schätzung der Kraft nach dem vollen Effekte, welchen sie hervorbringe, indem sie sich verzehre. Unter Effekt verstehe er hier nämlich nicht einen beliebigen, sondern den, bei welchem die ganze Kraft verbraucht werde, wie z. B. der nicht sei, welchen eine auf einer horizontalen Ebene laufende Kugel hervorbringe, weil sie bei einem solchen Effekte immer dieselbe Kraft beibehalte. Er habe aus den vollen Effekten einen solchen ausgewählt, der am meisten der Teilung in gleiche und ähnliche Teile fähig sei, wie er beim Aufsteigen eines schweren Körpers eintrete. Denn die Erhebung eines schweren Körpers auf 2,3′ sei genau 2,3 mal so gross, wie die auf 1′ und die Erhebung der doppelten Körper auf 1′ doppelt so gross, wie die der einfachen auf 1′ und endlich die Erhebung des doppelten Körpers auf 3′ sechsmal so gross als die des einfachen auf 1′, natürlich unter der Voraussetzung, dass schwere Körper in einer kleineren oder grösseren Entfernung vom Horizonte gleich schwer seien. Bei einer Feder lasse sich nicht ebenso leicht eine Homogenität nachweisen. Wenn also der Körper A einfach, B aber doppelt und ihre Geschwindigkeit die gleiche sei, so sei auch die Kraft des A einfach, die des B aber doppelt. Seien aber die beiden Körper gleich, die Geschwindigkeit des C aber doppelt wie die des A, so sei das, was in A ist, in C nicht genau doppelt, da zwar die Geschwindigkeit nicht aber die Grösse verdoppelt sei. Darin läge

also der von Anderen gemachte Fehler, welche meinten durch die Verdopplung der Modalität werde auch die Kraft verdoppelt.

Um dies aufrecht zu erhalten, habe er zwei an Grösse gleiche aber an Geschwindigkeit verschiedene Körper untersucht, ob sie Wirkungen hervorbringen, die an Grösse gleich und unter sich homogen sind. So nämlich habe sich das, was sich an und für sich nicht leicht vergleichen lasse, an den Effekten vergleichen lassen. Der Effekt müsse aber seiner Ursache dann gleich sein, wenn er durch den Aufwand der vollen Kraft erzeugt worden sei. Dabei sei es aber ganz gleichgiltig, in welcher Zeit er erzeugt worden sei. Gesetzt also die Körper A und C seien schwer und hätten ihre Kraft zu einem Aufstiege verwendet, was geschehen werde, wenn sie in dem Momente, in welchem sie ihre Geschwindigkeiten hätten, A die einfache, C die doppelte, an den Enden der Senkrechten PA, EC seien. Nach Galilei stehe dann fest, dass während A höchstens zur Höhe von 1′ aufsteigen könne, C höchstens die Höhe von 4′ erreiche. Und daraus folge, dass ein Körper mit doppelter Geschwindigkeit die vierfache Kraft habe von der, welche er bei einfacher Geschwindigkeit besitze, weil er ja unter Aufwendung seiner ganzen Kraft den vierfachen Effekt leiste. Auf ähnliche Weise lasse sich allgemein schliessen, dass sich die Kräfte gleicher Körper verhalten wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten und dass deshalb Kräfte sich allgemein verhalten, wie die einfachen Massen aber wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Die bemerkenswerte Arbeit schliesst mit den Worten: „Aber jetzt wollen wir die Irrtümer verlassen und die wahren und wunderbaren Gesetze der Natur deutlich darlegen.“ — Leider ist, wie oben erwähnt, diese Darlegung, der zweite Teil dieses specimen nicht erschienen, insbesondere aus dem Grunde, wie aus einer Bemerkung in einem Briefe hervorgeht, weil der erste Teil nicht die Aufnahme bei den Gelehrten fand, welche er erwartet hatte. Vielleicht mögen

auch andere, wichtige Fragen der Physik, der Philosophie Leibnitz davon abgehalten haben, möglicher Weise auch die Wahrnehmung, dass andere bedeutende Mechaniker sich mit aller Entschiedenheit seines neuen Kräftemafses annahmen. Leibnitz hat seitdem über dieses Thema nichts mehr geschrieben, vielleicht auch deswegen, weil sich in der nächsten Zeit kein bedeutender Gegner mehr gegen ihn erhob.

Als aber der Kampf von neuem begann, war Leibnitz bereits gestorben.

## Zweiter Abschnitt.

XIII. Nun trat eine grosse Pause in dem Kampfe ein; wir suchen wenigstens vergebens in der Litteratur der nächsten 30 Jahre nach einer Leistung, welche unsern Gegenstand zum Vorwurf hätte. Erst im Jahre 1722 veröffentlichte der Leydener Professor s'Gravesande in dem Journal litteraire eine hierauf bezügliche Abhandlung unter dem Titel Essai d'une nouvelle theorie sur le choc des corps. Um gleich von vorneherein dem möglichen Einwande zu begegnen, dass sich seine Lehrsätze auf Experimente stützen, die nicht über allen Zweifel erhaben sind, bemerkt er im Vorworte, dass dieselben mit der grössten Sorgfalt und Genauigkeit ausgeführt wurden und zwar nicht bloss einmal, sondern wiederholt in Gegenwart verschiedener Persönlichkeiten und dass die Resultate immer die gleichen gewesen seien und fährt dann fort: „Die Experimente, welche ich über den Stoss angestellt habe, haben mir deutlich gezeigt, dass Leibnitzens Ansicht die richtige ist; mir scheint, dass man zur Bestimmung der Wirkung des Stosses keineswegs, wie es immer geschieht, die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten betrachten sollte, als wenn diese Produkte den Bewegungsgrössen in den Körpern proportional wären; denn Bewegungsgrösse und Kraft sind Dinge, welche man nicht von einander

trennen kann. Diese Betrachtung führte mich dazu, meine Experimente weiter zu führen und ich kam dadurch auf eine Theorie des Stosses, welche zwar zu denselben Gesetzen führt, welche man bis jetzt gekannt hat, aber deren Richtigkeit auf einem anderen als dem bisherigen Wege zeigt. Man wird daraus erkennen, dass die Philosophen von einem der Erfahrung völlig widersprechenden Prinzipe zu den Gesetzen dadurch gelangten, dass sie etwas ausser Acht liessen, was nicht vernachlässigt werden dürfte und ohne das sie auf dem Wege, welchen sie einschlugen, nicht zur Wahrheit gelangen konnten."

Von seinen Definitionen sind folgende hervorzuheben: Kraft ist das, was einen in Bewegung befindlichen Körper von einem Punkte zum nächsten treibt; sie ist also etwas Positives. Die Kraft eines Körpers kann nur durch eine von aussen wirkende Ursache geändert werden. Man kann Kraft und Trägheit eines Körpers nicht verwechseln; denn es gibt Fälle, in welchen der Effekt ein anderer wird, indem die Trägheit sich ändert, während die Kraft dieselbe bleibt. Unter Trieb (effort) verstehen wir jede äussere Ursache, welche auf einen Körper wirkt, um seine Kraft zu ändern. Druck ist ein Trieb, welcher eine Zeit lang wirkt und welcher ohne lokale Bewegung wirken kann. Gleiche Drucke erzeugen in gleichen Zeiten gleiche Wirkungen. Daraus ergeben sich nun folgende Behauptungen: 1) Der Effekt eines Druckes, welcher durch keinen Gegendruck vernichtet wird, besteht darin, dass er eine Kraft entweder erzeugt oder vernichtet. 2) Ein jeder Druck, sei er konstant oder variabel, dessen Wirkung in endlicher Zeit eine endliche ist, kann in jedem unendlich kleinen Zeitteilchen nur eine unendlich kleine Wirkung erzeugen. 3) Druck und Kraft sind incommensurable Grössen; denn bei dem Drucke hat man in jedem Augenblicke nur den Trieb, welchen er eben in diesem Momente ausübt; Kraft ist aber der Effekt

eines Druckes von endlicher Dauer, also eine Summe unendlich kleiner Triebe und demnach im Verhältnisse zum Drucke unendlich gross. Der Effekt der kleinsten Kraft ist demnach unendlich grösser als der Effekt eines beliebigen Druckes, solange Kraft und Druck endliche Grössen haben. Es ist also unnütz, diese beiden Arten von Trieben zu vergleichen. Und wenn Einige meinten, durch Experimente zu solchen Vergleichen zu kommen, so waren sie im Irrtum, indem sie als Effekt des Druckes das nahmen, was der Effekt der Kraft war, welche den Druck erzeugte, die sich immer einstellt, wo ein Druck eine Bewegung erzeugt. Man denke sich zwei Kugeln mit gleichem Durchmesser, die eine von Blei, die andere von leichtem Holze; erstere sei behutsam auf Thon gelegt, letztere falle aus einer solchen Höhe, dass die in beiden Fällen entstehenden Grübchen gleich seien. Man würde sich nun täuschen, wollte man auf Grund dieses Experimentes die Wirkungen von Druck und Kraft vergleichen. Die Bleikugel drückt mit ihrem Gewichte auf den Thon, der durch seinen Widerstand nur einen Teil des Triebes des Gewichtes zerstört, der andere Teil aber verleiht der Kugel die Kraft, sich einzusenken. Die Kugel, welche so weit eingedrungen ist, bis Druck und Widerstand gleich sind, senkt sich sogar noch weiter ein infolge der Kraft, die sie während des Einsinkens erlangt hat. Wäre also die Kugel in einem Grübchen gelegen, das kleiner gewesen wäre, als das Experiment zeigt, so hätte sie durch ihr Gewicht dieses Grübchen nicht vergrössert, während doch die Erfahrung lehrt, dass es in einer weichen Masse kein Grübchen gibt, das der kleinste Stoss nicht vergrösserte.

Widerstand nennt s'Gravesande Alles, was einen Effekt aufhebt; daraus ergibt sich ohne Weiteres das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, sowohl beim Drucke als auch beim Stoss.

Die Kraft ist am Körper inhärierend; sie bleibt gleich,

solange sich der Körper mit gleicher Geschwindigkeit bewegt und kann nur durch einen entgegengesetzten Trieb verloren gehen.

Stoss ist immer der Effekt einer Kraft. Die Wirkung einer Kraft ist immer gleich der Kraft, welche der Körper verliert. Bei jedem Stosse von Körpern entsteht Abplattung und Verlust von Kraft; aber dieser Verlust kommt nur von der Abplattung der Körper. Dies gilt auch von den elastischen Körpern; nur wird bei ihnen die verlorene Kraft durch die Kraft der Elasticität wieder ersetzt.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich folgende Unterschiede zwischen Druck und Kraft: 1) Der Druck ist unendlich klein im Vergleiche mit der Kraft. 2) Die Intensität der Wirkung eines Druckes hängt nur von seiner Grösse ab; die einer Kraft aber ist ausserdem auch von dem Widerstande abhängig, den sie findet. 3) Der Effekt eines Druckes hängt von seiner Dauer ab, nicht aber der einer Kraft. 4) Es gibt keinen Druck ohne Wirkung auf ein Hindernis, die Kraft ist aber auch dann im Körper vorhanden, wenn kein Widerstand zu überwinden ist. 5) Der Druck vernichtet oft einen Gegendruck; die Kraft zerstört aber niemals eine Kraft, wenigstens nicht unmittelbar.

Dies war vorauszuschicken, um den nun folgenden Abschnitt dieser Arbeit verständlich zu machen, in welchem von dem Mafse der Kraft die Rede ist.

Kräfte, deren Gesammtwirkungen gleich sind, sind gleich; im allgemeinen verhalten sich Kräfte wie die Wirkungen, durch welche sie verzehrt werden. Kräfte verschiedener Körper verhalten sich wie die Massen, wenn die Geschwindigkeiten gleich sind. Aber Kräfte gleicher Körper verhalten sich wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten. Dies soll zuerst durch ein Experiment erwiesen werden, das ich als das erste dieser Art für wichtig genug halte, um seine Beschreibung wörtlich mitzuteilen:

„Ich bediente mich dreier Kugeln von Kupfer, welche ein und ein halb Zoll im Durchmesser hatten und völlig gleich waren; die eine war massiv, die beiden anderen hohl und jede aus zwei zusammengeschraubten Halbkugeln bestehend, was jedoch kaum wahrzunehmen war; ihre Gewichte und folglich ihre Massen verhielten sich genau wie 3:2:1. Im Folgenden werde ich die schwerste die Kugel 3, die nächste die Kugel 2 und die leichteste 1 nennen. In ein Gefäss von einem Zoll Tiefe hatte ich Thonerde gebracht von der feinsten Art; sie war sehr weich und sehr homogen. Die Oberfläche derselben bildete eine vollständige Ebene. Auf diesen Thon liess ich nun die erwähnten Kugeln aus verschiedenen Höhen fallen. Die Kugel wurde von unten gegen ein etwas ausgehöhltes Lineal gedrückt, auf welches sich meine Hand stützte, welche die Kugel hielt und dieses Lineal war von zwei anderen getragen, so dass sich das erstere nur parallel zur Ebene des Thones bewegen konnte. Ich wandte alle diese Vorsichtsmassregeln deswegen an, um genau die Höhe zu bestimmen, aus denen ich die Kugeln fallen liess, welche auf diese Art durch die Hand nicht den mindesten Druck erhalten konnten.

Liess ich nun die Kugel 3 aus einer Höhe von 9 Zoll und die Kugel 1 aus der Höhe von 27 Zoll fallen, so waren die Grübchen in dem Thone gleich. Liess ich Kugel 2 aus der Höhe 9 und Kugel 1 aus der Höhe 36 Zoll fallen, so waren die Grübchen sehr verschieden, indem sich die Kugel 1 viel tiefer einsenkte als 2, die erst dann ebenso tief eindrang, wenn sie aus der Höhe 18 fiel. Liess ich die Kugel 3 aus der Höhe von 18 Zoll und zwei aus der Höhe 27 fallen, so waren die Grübchen wiederum völlig gleich.

Die Grübchen, welche die Kugeln erzeugen, indem sie auf den Thon fallen, sind die vollständigen Wirkungen der Kräfte, welche die Körper am Ende ihres Falles haben. Wenn die Kugeln 1 und 3 beide aus der Höhe von 9 Zoll

fallen, so verhalten sich ihre im Falle erlangten Kräfte wie 1:3, folglich ist die Wirkung der Kugel 1, wenn sie aus der Höhe von 27 Zoll fällt, dreimal so gross als wenn sie aus der Höhe 9 fällt, weil diese Wirkung gleich der der Kugel 3 ist, wenn diese aus der Höhe von 9 Zoll fällt. Daraus ergibt sich, dass die Kraft einer Kugel wächst wie die Höhe, aus der sie fällt, was sich auch aus den anderen Experimenten ergibt. Aber diese Höhen verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche im Falle entstehen und mit welchen der Körper den Thon trifft.

Die erwähnten Experimente beweisen deutlich die Behauptung. Die Gleichheit der Grübchen ist so exakt, wenn die Quadrate der Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Massen und ihre Ungleichheit so gross, wenn die Geschwindigkeiten selbst den Massen reciprok proportional sind, dass mir nicht der geringste Zweifel blieb, nachdem ich diese Experimente gesehen hatte.

Es ist nun zu zeigen, wie diese Behauptung eine Folge der Natur der Kräfte ist. Zu dem Zwecke muss die Behauptung vorausgeschickt werden, dass ein bewegter Körper der Beschleunigung im Verhältnisse seiner Geschwindigkeit Widerstand leistet. Es ist zu beweisen, dass der Trieb, welcher nötig ist, die Geschwindigkeit eines Körpers zu vermehren, im Verhältnisse der Geschwindigkeit wächst, welche der Körper schon hat. Um zu zeigen, dass weniger Trieb nötig ist, einem Körper einen gewissen Grad von Geschwindigkeit mitzuteilen, als um einen gleichen aber bewegten Körper um denselben Grad von Geschwindigkeit zu bereichern, genügt es darauf hinzuweisen, dass man in beiden Fällen denselben Trieb braucht, wenn im zweiten Falle die bewegende Ursache mit der Geschwindigkeit bewegt wird, welche der Körper vor der Vermehrung seiner Geschwindigkeit hatte, was ohne Trieb nicht möglich ist. Wenn hier Einige den falschen Schluss zogen, dass in beiden Fällen

der gleiche Trieb nötig sei, so ist der Grund hiefür in der Eigenschaft der Schwere zu suchen, dass sie auf einen ruhenden Körper ebenso wirkt wie auf einen bewegten und dass sie in gleichen Zeiten einem fallenden Körper gleiche Geschwindigkeit mitteilt. Aber sie teilt ihm nicht auch gleiche Kraft mit, wie die erwähnten Experimente beweisen. Man kann also aus der Natur der Schwere, welche uns völlig unbekannt ist, keine Schlüsse gegen unsere Behauptung ziehen; denn solche Schlüsse werden durch die Erfahrung völlig widerlegt.

Eine zusammengedrückte Feder öffnet sich mit einem gewissen Triebe. Wird dieser ganze Trieb angewandt, um einem Körper Kraft mitzuteilen, so ist diese Kraft gleich dem Triebe der Feder; und das gilt auch von mehreren Federn, welche sich gleichzeitig oder allmählich öffnen. Man denke sich nun eine solche Reihe von Federn und zwar so, dass sich jede nur um endlich wenig ausdehnt. Die letzte Feder teilt dann dem Körper durch ihre Ausdehnung eine unendlich kleine Geschwindigkeit mit, falls dieser in Ruhe war. Soll nun diese Geschwindigkeit um dieselbe unendlich kleine Grösse vermehrt werden, so genügt es nicht, dass auch die zweite Feder sich ausdehnt, sondern sie muss sich während ihrer Ausdehnung schon mit der Geschwindigkeit bewegen, welche der Körper erlangt hat und sie muss sich noch zudem gegen ein festes Hindernis stützen. Es ist also für den zweiten unendlich kleinen Geschwindigkeitsgrad der doppelte Trieb nötig. Durch eine ähnliche Betrachtung kommt man zu dem Schlusse, dass, um einem Körper eine unendlich kleine Vermehrung seiner Geschwindigkeit zu erteilen, ebensoviele unendlich kleine Triebe nötig sind, als der Körper bereits Geschwindigkeitsgrade hat, oder mit anderen Worten, dass der Trieb, welcher nötig ist, die Geschwindigkeit eines Körpers um unendlich wenig zu vermehren, im Verhältnisse dieser Geschwindigkeit wächst und damit ist die obige Be-

hauptung bewiesen. Aus diesem Beweise ergibt sich auch die Unrichtigkeit der Annahme, dass vier Federn, welche sich gleichzeitig öffnen, dem Körper viermal mehr Geschwindigkeit mitteilen als eine Feder allein und diese Annahme stützte sich auf die falsche Voraussetzung, dass die Kraft eines Körpers seiner Geschwindigkeit proportional sei.

Es ergibt sich also, dass der Trieb all der kleinen Federn, welche sich ausdehnen, nötig ist, um einem Körper einen gewissen Grad von Geschwindigkeit zu erteilen; dieser Trieb hat keinen anderen Effekt als die Bewegung des Körpers; also müssen sich die verschiedenen Kräfte, welche der Körper empfängt, indem er Geschwindigkeit erhält, verhalten wie die Zahlen der unendlich kleinen Federn, welche sich ausdehnen, um diese verschiedenen Geschwindigkeiten zu erteilen. Es stelle die Gerade AF die Geschwindigkeit dar, welche ein Körper durch Beschleunigung erhalten hat und Ab, bc ... seien die unendlich kleinen Teilchen, welche er allmählich erhält, dann werden sich die Zahlen der Federn, welche jeden einzelnen Grad von Geschwindigkeit erzeugen, verhalten wie die Rechtecke Abhe, bcif, wenn nämlich bh, ci die Zahlen der Federn bezeichnen, welche nötig sind, die Geschwindigkeit eines Körpers um einen Grad zu erhöhen und die Summe aller Federn wird der ganzen Fläche über AF proportional sein, welche Fläche ein Dreieck ist, weil die Stückchen Ac, ch, hf ... unendlich klein sind. Wenn sich also die Geschwindigkeiten wie $Ad : AF$ verhalten, so werden sich die Kräfte wie $Ad^2 : AF^2$ verhalten.“ — Eine Kritik dieses Beweises werden wir weiter unten kennen lernen.

„Zwei Körper, deren Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Massen verhalten, haben demnach Kräfte, welche sich ebenfalls umgekehrt wie die Massen verhalten.“ — s'Gravesande wandte sich nun zur Betrachtung nicht elastischer Körper, aus welcher wir Folgendes hervorheben

wollen. Solche Körper trennen sich nach dem Stosse nicht, weil kein Trieb vorhanden ist, der eine Trennung bewirken sollte. Die Summe der Kräfte ist bei solchen Körpern nach dem Stosse kleiner als vor demselben; denn bei jedem Stosse tritt eine Abplattung ein und die Kraft, welche diese hervorbringt, ist verloren und es ist keine Kraft vorhanden, welche diesen Verlust ersetzen sollte. Diese verlorene Kraft ist die gleiche, solange die relative Geschwindigkeit der beiden Körper, d. h. die Summe resp. Differenz, ihrer absoluten Geschwindigkeiten die nämliche ist. Bei gegebener relativer Geschwindigkeit zweier Körper ist ihre Kraft ein Minimum, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen und wenn sich ihre absoluten Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Zwei Körper werden nach dem Stosse in Ruhe bleiben, wenn bei gegebener relativer Geschwindigkeit die Summe ihrer Kräfte vor dem Stosse ein Minimum ist; also kommen zwei Körper nach dem Stosse zur Ruhe, wenn sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen verhalten. s'Gravesande gibt zum Beweise dieser Behauptungen auch eine Reihe von Experimenten an, die aufzuzählen uns aber zu weit führen würde. Wichtig ist die Behauptung, dass die verlorene Kraft proportional sei dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit, dem Produkte der Massen und umgekehrt der Summe der Massen; denn man darf nur den Fall betrachten, in welchem die Körper nach dem Stosse zur Ruhe kommen; nennt man hiebei die absoluten Geschwindigkeiten x, y, die relative d, so ist $x + y = d$; $A x = B y$; $x = \frac{B d}{A + B}$;

$y = \frac{A d}{A + B}$; und $A x^2 + B y^2 = \frac{A B d^2}{A + B}$ und das ist dann überhaupt der Ausdruck für die verlorene Kraft, weil ja diese, wie oben gezeigt wurde, die nämliche ist, solange die relative Geschwindigkeit gleich bleibt. Auf diesem Wege

kann man auch zeigen, dass die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stosse $\frac{A a + B b}{A + B}$ ist; denn die Summe der Kräfte vor dem Stosse ist $A a^2 + B b^2$; die resp. Geschwindigkeit a -b und der Kraftverlust $\frac{A B (a-b)^2}{A + B}$, also die übrig bleibende Kraft $\left(\frac{A a + B b}{A + B}\right)^2$, d. h. die restierende Geschwindigkeit $\frac{A a + B b}{A + B}$. s'Gravesande macht hiebei die Bemerkung, dass der Beweis, den man für die Richtigkeit dieses Gesetzes aus der Annahme abzuleiten pflege, dass die Kraft der Bewegungsgrösse proportional sei, nur deswegen geführt werden konnte, weil man gleichzeitig annahm, dass die Kraft vor und nach dem Stosse die gleiche sei, was doch unmöglich richtig sein könne. Ebenso wird gezeigt, dass die vertauschten Geschwindigkeiten nach dem Stosse sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Auch für diese Behauptungen werden experimentelle Beweise beigebracht und zwar mit Hilfe von kupfernen Kugeln, welche man auf Thonkugeln stossen liess, wobei die hiedurch entstandenen Aushöhlungen gemessen wurden.

Schliesslich spricht s'Gravesande von dem Stosse elastischer Körper; diese trennen sich nach dem Stosse, weil bei ihnen die elastische Kraft den durch den Stoss entstandenen Kräfteverlust ersetzt und diese wie eine Feder betrachtet werden kann, welche sich zwischen zwei Körpern öffnet. Eine solche Feder teilt den Körpern Kräfte mit, welche sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Denn der Trieb, welchen eine Feder auf der einen Seite bei ihrer Dehnung ausübt, hängt von dem Widerstande ab, welchen sie auf der anderen Seite findet, d. h. von dem Hindernisse, gegen das sie sich stemmt, weil Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so dass sie also alle ihre Kraft auf der einen Seite

anwendet, wenn jenes Hindernis unbeweglich ist. Und das gilt auch dann noch, wenn die beiden Körper und die Feder einer gemeinsamen Bewegung unterworfen sind. Die resp. Geschwindigkeit, mit welcher sich die beiden elastischen Körper nach dem Stosse trennen, ist dieselbe wie diejenige, mit welcher sie sich nähern; denn ist ihre resp. Geschwindigkeit vor dem Stosse d, x und y diejenige, welche die elastische Kraft denselben beim Stosse mitteilt, so ist die Summe der Kräfte nach dem Stosse $Ax^2 + By^2$; diese muss aber gleich sein der Kraft, welche beim Stosse die Abplattung bewirkt also gleich $\frac{ABd^2}{A+B}$. Da aber $Ax = By$, so ergibt sich leicht $x + y = d$. Die ausgetauschten Geschwindigkeiten elastischer Körper sind doppelt so gross als sie wären, wenn die Körper nicht elastisch wären; denn sind x und y die Geschwindigkeiten, welche die Körper ohne Elasticität empfingen, u und z aber die Zuwüchse in Folge der Elasticität, so sind die vollen Geschwindigkeiten $x + u$, $y + z$; aber $Ax = By$ und $Au = Bz$ nach Obigem: also $u + z : x + y = z : y$; aber $u + z = d$; also $z = y$ und folglich $y + z = 2y$ und $x + u = 2x$. Wenn einige Mathematiker dies Gesetz aus der Annahme ableiteten, dass die Kraft der Bewegungsgrösse proportional sei, so war dies bloss dadurch möglich, dass sie annahmen, eine Feder teile nach beiden Seiten die gleiche Kraft mit, wodurch also eine Compensation des Irrtums eintrat. Die Summe der Kräfte elastischer Körper ist also vor und nach dem Stosse die gleiche, was ja schon Huyghens gezeigt hat.

s'Gravesandes Entwicklungen wurden, wie er selbst in einem Anhange — veröffentlicht im nämlichen Journale — mitteilt, von mehreren Seiten bekämpft; leider erfahren wir nicht von welchen. Welcher Art diese Einwürfe waren, kann man aus ein paar Andeutungen entnehmen: einmal war ihm vorgehalten worden, dass er bei seinen Experimenten auf den Widerstand der Luft keine Rücksicht genommen

habe; allein dieser Widerstand ist nach seiner Angabe unmerkbar, und wäre er wahrnehmbar, so würden seine Experimente beweisen, dass die Differenz der Kräfte zweier Körper grösser ist, als die Differenz der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten. Von anderer Seite war der Versuch gemacht worden, aus den Gesetzen der Reaktion einen Beweis gegen seine Experimente zu finden. „Diese verschiedenen Einwürfe“, sagt er, „stützen sich auf verschiedene Prinzipien und die, welche mir mitgeteilt wurden, widerlegen sich gegenseitig; das beweist aber, dass es keinen sicheren Weg gibt, mit dem Experimente die Annahme in Einklang zu bringen, dass die Kraft der Geschwindigkeit proportional sei und dass Jeder, um dies doch zu erreichen, dem Worte Kraft einen anderen Sinn gibt, nach welchem er die Sache von einer anderen Seite betrachtet.“ Mir scheint, man darf unter Kraft nur das verstehen, was der Körper bei der Bewegung hat und was sich in demselben Körper nicht vorfindet, wenn er in Ruhe ist, also das, wodurch er ein Hindernis überwinden kann. Das Maſs dieser Kraft ist gerade diese Wirkung; denn ein Körper verliert nur durch diese Wirkung an seiner Kraft und weil Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, verliert er im Verhältnisse dieser Wirkung. Also muss man als Maſs der Kraft die Summe aller Wirkungen nehmen, durch die der Körper seine ganze Kraft verbraucht und zwar ohne Rücksicht auf die Zeit. Ein Körper erzeugt die nämliche Wirkung in um so kleinerer Zeit, je grösser die Intensität seiner Wirkung ist.

Federn, welche sich gleichmässig ausdehnen, teilen Körpern, welche sie dadurch in Bewegung setzen, gleiche Kräfte mit, ohne Rücksicht auf die Zeit noch auf den momentanen Trieb der Kraft. Daraus ergibt sich ein neues Mittel, Kräfte zu messen.

s'Gravesande experimentierte deshalb mit Cylindern aus Elfenbein, von denen jeder 1½ Zoll im Durchmesser hatte

und an der einen Seite in eine Halbkugel endigte; er liess dieselben aus verschiedenen Höhen herabfallen, indem er sie an dem nicht abgerundeten Ende an einen feinen Faden band, um die Bewegung nicht ungleich zu machen; der Cylinder fiel, wenn man den Faden los liess, in der Richtung seiner Axe und stiess mit dem Mittelpunkte der Halbkugel auf eine horizontale Marmorplatte. Fiel nun ein Cylinder aus einer Höhe von 18 Zoll und ein anderer von doppeltem Gewichte aus einer solchen von 9 Zoll, so waren die Abplattungen des Elfenbeines genau gleich; also müssen die Körperkräfte auch gleich gewesen sein; denn die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten waren dieselben. — Die Höhen, bis zu welchen die Körper zurücksprangen, waren gleich oder mindestens im selben Verhältnisse wie diejenigen, aus denen sie gefallen waren; also teilen gleiche und gleich gespannte Federn, welche den Körpern gleiche Kräfte verleihen, Geschwindigkeiten mit, die sich umgekehrt wie die Wurzeln aus den Massen verhalten. Würde man aber die Kräfte nach dem alten Maſse messen, so hätten sich die Federn sehr ungleichmässig gespannt und die Durchmesser der Abplattungen müssten sich fast wie 2 : 3 verhalten; diese Abplattungen sind aber sehr leicht zu bemerken in Folge der Spuren, welche sie auf dem Marmor hinterlassen, wenn man diesen ein wenig befeuchtet. —

Noch ein Beweis: Man denke sich einen Körper A, welcher sich in der Richtung A B bewegt mit einer Geschwindigkeit, welche dieser Linie proportional ist, dann hat dieser Körper eine Kraft, welche dieser Geschwindigkeit entspricht. Wird nun dieser Körper in der Richtung A D, welche zu A B senkrecht ist, gestossen, so wird diese Bewegung an der Bewegung des Körpers nichts ändern, gerade wie wenn der Körper in Ruhe gewesen wäre. Daraus folgt aber, dass die volle Kraft des Körpers gleich der Summe der Kräfte ist, welche den Geschwindigkeiten A B, A D

entsprechen. Aber andererseits steht fest, dass seine Geschwindigkeit A C die Diagonale des Rechtecks A B C D ist; also muss auch die Kraft, welche dieser Geschwindigkeit entspricht, gleich der Summe der den Geschwindigkeiten A B, A D entsprechenden Kräfte sein und das kann nur sein, wenn die Kräfte den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional sind. — Wir werden später sehen, ob und inwiefern dieser Beweis zulässig ist. Schliesslich weist s'Gravesande darauf hin, dass zwar ohne Zweifel Leibnitz der erste war, welcher dieses Gesetz vollständig klar gelegt hat, dass aber schon andere vor ihm, insbesondere Huyghens eine Ahnung davon hatten. Denn schon in seinen Untersuchungen des Pendels und des Stosses geht er von der Betrachtung der Höhen aus, zu welchen die Körper aufsteigen können und diese sind den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional; dann hat er offen ausgesprochen, dass die Bewegungsgrösse durchaus nicht immer erhalten bleibe, dass es aber ein Gesetz sei, dass die Körper ihre aufsteigende Kraft beibehalten und dass für diese die Summe der Quadrate der Geschwindigkeiten konstant bleiben müsse. (Hist. des ouvrages des sçavans. Juni 1630.)

Unbestritten hat s'Gravesande das Verdienst, zuerst auf experimentellem Wege die Richtigkeit des neuen Maſses bewiesen zu haben, ein Verdienst, das um so höher zu schätzen ist, da, wie wir später sehen werden, die rein mathematischen Beweise ohne alle Ausnahme hinfällig sind.

XIV. Auch englische Gelehrte nahmen in dem Streite um das Maſs der Kräfte Partei und zwar, wie ich gleich bemerken will, fast ausnahmslos gegen Leibnitz; mag dieser Umstand nun auch in der Überzeugung derselben seinen Grund finden, so darf doch nicht übersehen werden, dass die Newtonsche Schule, welche dem neuen Maſse nicht hold sein konnte, in England fast die alleinherrschende war.

Zunächst ist zu erwähnen ein Brief Henry Pembertons. welcher in Nr. 371 der Philosophical Transactions, Jahrgang 1722 veröffentlicht ist, und in welchem versucht wird mit Hilfe eines Experimentes das Falsche der neuen Annahme beim Mafse der Kräfte zu zeigen.

Der Engländer Polen hatte, wie s'Gravesande mit Kugeln experimentiert von gleicher Grösse aber verschiedenem Gewichte, die er auf eine weiche Masse fallen liess aus Höhen, welche ihren Gewichten reciprok proportional waren und gefunden, dass dieselben gleiche Grübchen erzeugten, woraus er schloss, dass die Kraft, mit welcher die Kugeln auffielen, die gleiche sei. Das meint nun Pemberton nicht ohne weiteres zugeben zu können, ja er glaubt gerade mit Hilfe dieses Experimentes den grossen Irrtum Leibnitzens erweisen zu können. Er wundere sich, dass Polen nicht der Verdacht kam, ob seine Behauptung nicht einem Naturprinzipe widerspreche. In der Naturphilosophie müssten unsere Schlüsse sich immer auf unzweifelhaft richtige Experimente stützen; man müsse vor allem den eigentlichen Zweck eines Experimentes verstehen und das scheine ihm hier nicht der Fall zu sein. Dieses sei mehr dazu angethan uns das Gesetz kennen zu lehren, nach welchem eine weiche Masse bewegten Körpern widerstehe, als die Kräfte zu zeigen, mit welchen die Kugeln aufschlagen; denn welcher Art diese auch seien, die Effekte müssten verschieden sein je nach dem Widerstande, welchen sie erleiden.

Dieses Experiment nun zeige, dass wenn zwei bewegte Kugeln gegen gleiche Teilchen der weichen Masse stossen, der Widerstand dieser Masse der nämliche sei, mit welcher Geschwindigkeit sie sich auch bewegen. Man denke sich zwei Kugeln A und B von gleicher Grösse aber ungleichem Gewichte, welche gleich tief in die weiche Masse eindringen; ihre Geschwindigkeiten seien reciprok proportional den Quadratwurzeln aus den Massen; dann verhalte sich, da das

Verhältnis der Bewegungsgrösse von A oder der Kraft, mit der sie sich bewege, zu dem von B im zusammengesetzten Verhältnisse der Massen und der Geschwindigkeiten der Kugeln stehe, die Kraft von A zu der von B umgekehrt wie ihre Geschwindigkeit. Weil aber die Kugeln gleich tief eindringen, so müsse der Effekt des Widerstandes der Zeit proportional sein, in welcher dieselben diese Aushöhlungen zu stande brächten; er sei also der Geschwindigkeit einer jeden Kugel reciprok proportional; denn die momentanen Kraftverluste der Kugeln verhielten sich umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten; und da in diesem Falle die Kräfte der Kugeln sich ebenso verhielten, so müssten die Kräfte, mit welchen sie auf die weiche Masse wirken, in demselben Verhältnisse stehen. Und deshalb müssten nach der Theorie des Widerstandes nach Verbrauch der ganzen Kraft beider Kugeln diese gleich tief einsinken. Bei dem Experimente Polens trat aber die obige Voraussetzung ein, also sei es nur eine Bestätigung dieser Theorie.

Er wolle übrigens auch ein Experiment anführen, aus welchem sich besser Leibnitzens Satz, dass Effekte den Ursachen proportional seien, ableiten lasse als hier, und mit welchem man auch die alte Lehre verteidigen könne.

Es stamme von Mersennus. Das eine Ende eines Waagebalkens trage ein Gewicht und aus einer gewissen Höhe lasse man auf das Ende des anderen ein anderes Gewicht fallen, das im Aufschlagen den ersteren so weit heben soll, dass er gerade im stande ist, eine gewisse Feder auszulösen; hänge man nun ein anderes Gewicht an den ersteren Balken, so müsse die Höhe, aus welcher nun das andere Gewicht herabfallen müsse, um die Feder auszulösen, sich zur vorigen Höhe so verhalten, wie man gefunden habe, dass die Geschwindigkeit, mit welcher das fallende Gewicht den Balken treffe, im letzteren Falle sich zu dem im ersteren verhalte, wie die letztere Höhe zur ersteren, den einen Fall ausgenommen,

wie auch Mersenn bemerke, dass das aus grosser Höhe fallende Gewicht etwas grösser sei als das andere Gewicht es verlangt. Welcher von den beiden Armen sich aber biege, oder welcher eine Reibung erleide, brauche man gar nicht zu untersuchen, da ja nach der neuen Lehre diese Unregelmässigkeiten zu den gewöhnlichen Effekten des Experimentes gehörten. Daraus kann man sehen, fährt Pemberton fort, dass die wahre Methode zu denken, welche fälschlich angewendet, Leibnitzens Meinung beweist, richtig gebraucht, die andere Meinung bestätigt! — Es ist nur eine Frage, ob der Leser durch die hier mitgeteilte Entwicklung von dieser Richtigkeit überzeugt ist!

Nun wendet er sich dazu, die Unsinnigkeit des Leibnitzschen Theorems mit Hilfe der Experimente Polens zu zeigen. „Wenn zwei Kugeln A und B von gleicher Grösse aber verschiedenem Gewichte mit gleicher Kraft auf eine weiche Masse fallen und all ihre Bewegung verlieren, indem sie gleiche Grübchen erzeugen, so verlieren sie notwendig während der ganzen Dauer der Bewegung gleiche Grade von Kraft, wenn sie gleiche Teilchen der Masse auf die Seite schieben. Nun schreibt Leibnitz der Schwere die Fähigkeit zu, einer fallenden Kugel Kraftgrade mitzuteilen, welche der Höhe, über die sie fällt, proportional sind. Wäre also kein Widerstand von Seite der weichen Masse vorhanden, so würden die Kugeln, indem sie in dieselbe eindringen, an Kraft zunehmen im Verhältnisse ihrer Gewichte. Weil aber die Kugeln denselben Grad Kraft beim Eindringen in die weiche Masse verlieren, so besteht der Effekt des Widerstandes darin, dass er den Kugeln einen Grad Kraft nach dem anderen nimmt und noch überdies die Zuwüchse an Kraft, welche sie in Folge der Schwere empfangen hätten. Aber ferner der Widerstand, welchen die Kugel A erfährt, steht zu dem der Kugel B in zusammengesetztem Verhältnisse des Effektes des Widerstandes und der Zeit, in welcher dieser

Widerstand stattfindet, welch letzteres Verhältnis dem der Geschwindigkeiten der Kugeln gleich ist. Aber es ist ja bewiesen, dass der Effekt des Widerstandes der weichen Materie auf die Kugeln zweifach ist, und dass der eine Teil, welcher durch die Bewegung der Kugeln hervorgerufen wird, der gleiche ist, der andere Teil aber im Verhältnisse der Quadrate der Geschwindigkeiten steht. Ein Teil des Widerstandes, welchen A erfährt, verhält sich zu dem von B, wie die Geschwindigkeit von A zu der von B und der andere Teil wie die Geschwindigkeit von B zu der von A. Aber durch den Teil des Widerstandes, welcher der Geschwindigkeit direkt proportional ist, kann die Kugel niemals vollständig aufgehalten werden; denn durch das Aufhalten der Kugel wird dieser Teil des Widerstandes auch völlig aufhören und die Schwere wird weiter wirken, wenn nicht der andere Teil dies hindert. Aber ich sage dagegen, keiner von den Teilen des Widerstandes kann gross genug sein die Kugel aufzuhalten, denn der Grad dieses Widerstandes, welcher der Geschwindigkeit reciprok ist, wird, falls die Bewegung aufhört, unendlich gross, so dass keine Kraft im stande wäre, die Kugel noch weiter in die Materie zu treiben. Es wäre ja überdies sinnlos, dass der Widerstand bei abnehmender Geschwindigkeit der Kugel wachsen sollte. Also dient dieses Experiment, welches die wahre Ansicht stürzen sollte, dazu, dieselbe aufrecht zu halten". Er wendet dann diesen Beweis noch auf den Widerstand von Flüssigkeiten an, die ja mit weichen Massen grosse Aehnlichkeit hätten; doch das ist eine Sache, welche uns hier ferner liegt. Bemerkenswert ist nur, dass er in einem Nachtrage ein Experiment angibt, mit dem man den Widerstand von Flüssigkeiten leicht vergleichen könne — er schlägt nämlich vor, feine Seide in parallelen Ebenen aufzuspannen und Kugeln darauf fallen zu lassen —, von dem wir ferner hören werden (s. S. 60), dass es später zu dem Zwecke angestellt wurde, die Kräfte zu

messen. Allerdings bemerkt auch Polen hierüber, dass bei gleicher Spannung der Seide der gleiche Grad Kraft verloren gehe und dass die Zeit des Widerstandes um so kleiner sei je grösser das Gewicht; dass ferner der Verlust an Bewegung selbst der Zeit proportional sei. Je schwerer aber die Kugel ist, desto mehr Seide wird sie zerreissen, weshalb die Zahl der Ebenen, welche dem Widerstande einer jeden Ebene reciprok ist und der Widerstand, welchen die Kugel erfährt, immer gleich sein wird. Daraus ergibt sich dann die Anwendung auf den Widerstand von Flüssigkeiten. — Bemerken möchte ich nur noch, dass natürlich der zweite Teil des Pembertonschen Beweises mit dem ersten so zusammenhängt, dass eine Ablehnung des einen auch eine solche des anderen bedeutet. —

XV. Im nächstfolgenden Jahre erschien in derselben Sammlung Nr. 374 eine Arbeit von John Theophil Desaguliers, in welcher durch eine Reihe von Experimenten die Richtigkeit des alten Mafses nachgewiesen werden sollte, oder vielmehr dass das Moment einer bewegten Kugel gefunden werde durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit — eine ausgesprochene Streitschrift gegen Leibnitz. Wenn man mit einer bestimmten Kraft ein Gewicht von 50 Pfd. 4 Fuss weit in einer bestimmten Zeit bewegen könne, so brauche man zweifellos die doppelte Kraft um 100 Pfd. in derselben Zeit über denselben Weg zu bringen; mit derselben Kraft könne man aber 100 Pfd. nur 2 Fuss weit schaffen. Da aber 100 Pfd. zweimal 50 Pfd. enthalten, so enthalten diese, wenn man jedem von beiden 2 Grad Geschwindigkeit gibt, dieselbe Kraft, als wenn man einem 4 Grad Geschwindigkeit geben würde; also sei klar, dass die Kraft proportional sei dem Produkte aus Masse und Geschwindigkeit. 1. Experiment: Der Stützpunkt C eines Balkens A B sei so gewählt, dass A C : C B = 1 : 4. Dann ist bekannt, dass ein Gewicht von 100 Pfd. in A einem Gewicht von 25 Pfd. in B Gleich-

gewicht hält, da dieses eine viermal grössere Geschwindigkeit hat wie jenes. Wären die Kräfte im Verhältnisse der Massen und der Quadrate der Geschwindigkeiten, so müsste das Gewicht von 25 Pfd. in D aufgehängt sein, das nur zweimal so weit von C entfernt wäre als A. So oft die Geschwindigkeiten ihren Massen reciprok sind, werden sich die Kräfte aufheben. Das gilt auch beim Stosse fallender Körper. Fällt ein solcher bei beschleunigter Bewegung einen Fuss weit in $^1/_4$ Sekunde, so erlangt er eine Geschwindigkeit, welche in derselben Zeit zwei Fuss weit bei einförmiger Bewegung treibt; derselbe Körper fällt 4 Fuss weit in $^1/_2$ Sekunde und erreicht eine Geschwindigkeit, welche ihn in derselben Zeit 8 Fuss weit treibt bei gleichförmiger Bewegung. Da aber die Zeit in letzterem Falle die doppelte ist, so ist auch die Geschwindigkeit nur doppelt und also auch der Stoss doppelt so gross wie im ersteren Falle.

2. Experiment. Ein Gewicht von 1 Pfd. ruhe auf der Schale am Ende A des Balkens A B, welcher von einem eisernen Träger gestützt ist. Lässt man nun das Gewicht C einen Fuss hoch auf das andere Ende B herabfallen, so hebt es das Gewicht P so hoch, dass die Kugel gegen den Knopf i fliegt. Hat P 2 Pfd., so kann es nur durch einen Fall des C aus einer Höhe von nicht weniger als 4 Fuss gehoben werden, während, wenn die Kraft des Stosses dem Wege proportional wäre ohne Rücksicht auf die Zeit, wie Leibnitz und Andere meinen, P gehoben werden muss, wenn C nur 2 Fuss herabfällt, was niemals sein kann. Freilich wird ein Teil der Kraft durch die Reibung verloren; aber das hindert die Richtigkeit des Satzes nicht: denn P = 2 Pfd. wird niemals gehoben wenn C weniger als 4 Fuss fällt.

3. Experiment. Statt C fallen zu lassen, kann man es auch an einen ziemlich langen Strick binden und zuerst 1 Fuss hoch heben, dann wird es diesen Fuss auf B herab-

fallend A heben; wenn aber P 2 Pfd. hat, so muss C von einer grösseren Höhe als 4 Fuss fallen, um A zu heben.

4. Experiment. Eine bleierne Kugel C von 15 Unzen, welche in der Mitte durchbohrt war und ein Seil hindurch liess, welches durch das Gewicht N gespannt war und durch eine Höhlung des Armes B ging, lag auf letzterem, ohne diese Aushöhlungen zu berühren. Setzt man in die andere Schale ein Gewicht P, so dass C aus der Höhe eines Zolles fallend im stande war dieses zu heben und die oben erwähnte Feder zu lösen und fügt man diesem P noch ein anderes gleiches Gewicht bei und lässt dann C längs des erwähnten Seiles 2 Zoll hoch herabfallen, dann 3, 4, so wird es P nicht heben, ausser wenn es 5 oder mehr Zoll fällt.

5. Experiment. Eine Kugel von doppeltem Gewicht, welche 1 Zoll fällt, hebt das doppelte P zur gewohnten Höhe; ändert man das Gewicht P stetig, so muss die erste Kugel mehr als 4mal so hoch fallen, um das nämliche Gewicht zu heben.

6. Experiment. Hängt man C mit Hilfe eines Seiles an den Arm B, so war ein Fall von mehr als 5 Zoll nötig, um das andere zur doppelten Höhe zu bringen, als wenn C nur 1 Zoll fiel; nur war die Höhe nicht so gross, als im vorigen Falle. Hebt man dann C, so kann es nur denselben Effekt erzeugen, wenn es mehr als 4 Fuss gehoben wird. Die Reibung kann hier nicht zu Gunsten des neuen Theorems angeführt werden; sonst müssten die Höhen noch grösser werden als im Verhältnisse der Quadrate der Geschwindigkeiten, was aber nie der Fall ist.

Dass also das Moment der Körper in Proportion zur Masse und Geschwindigkeit ist, sei ausser Zweifel schon nach dem, was Newton aus dem Stosse elastischer Kugeln bewiesen habe. Desagulier versichert, dies oft experimentell bestätigt gefunden zu haben; er stellte eigens zur Untersuchung der hier behandelten Frage neue Experimente an.

7. Experiment. Zwei Kugeln von je 12 Unzen wurden an der von Mariott angegebenen Maschine zur Messung des Stosses von Kugeln befestigt und bis zum höchsten Punkt eines Kreises gehoben, vor welchem dieselben spielten; liess man sie fallen und aneinander stossen, so sprangen sie zur selben Höhe zurück.

8. Experiment. Nimmt man statt des einen Balles von 12 Unzen einen solchen von nur 6 und lässt diesen 8 den anderen aber 4 Grade weit fallen, so kommt letzterer nach dem Stosse wieder zur Höhe 4.

9. Experiment. Fällt ein Ball von 3 Unzen 16 Grade, der von 12 Unzen 4 Grade, so ist es wieder wie oben.

10. Experiment. Fällt ein Ball von 2 Unzen 6 Grade und ein solcher mit 12 nur 1 Grad, so wird 12 bis zu 1 Grade zurückgestossen und wenn 2 Unzen 12 Grade, 12 Unzen aber 2 Grade weit fallen, so kommt 12 zur Höhe 2.

11. Experiment. Ein Ball von 8 Pfennig Gewicht $(= \frac{1}{30} \cdot 12$ Unzen), der 15 Grade fällt, treibt einen solchen von 12 Unzen, der einen halben Grad fällt, von seinem Platze zurück.

Bei all diesen Experimenten seien die Fehler bei den kleinen Kugeln grösser als bei den grossen, einmal weil erstere in ihrer Bahn mehr von der Cykloide abweichen als letztere und dann weil die Wirkung des Luftwiderstandes auf sie grösser ist. Aber all diese Fehler bringen die Erscheinungen damit nicht mehr in Einstimmung, was eintreten müsste, wenn die Kräfte sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhielten; sonst müsste der Ball 12 zu einer ganz anderen Höhe kommen.

In einer zweiten Abhandlung, welche in Nr. 376 der Phil. Trans. 1723 enthalten ist, werden nun die experimentell gewonnenen Erfahrungen einer Betrachtung unterzogen.

Zuerst wendet er sich gegen das bekannte Polensche Experiment. Man müsse beachten, dass wenn sich zwei Kugeln mit gleichen Kräften aber ungleichen Geschwindigkeiten bewegen, die schnellere einen tieferen Eindruck in den Thon mache, während die langsamere ihre Bewegung dem Thone schon ganz mitgeteilt habe und deshalb nicht so tief eindringen könne als die schnellere, welche weniger Teile des Thones in Bewegung setze, mit Ausnahme derjenigen, welche ihr unmittelbar im Wege stehen und die um so weniger Zeit zum Widerstande hätten, als ihre Geschwindigkeit grösser sei. Und um dies klarer zu machen, führt er folgendes Beispiel an: wenn man eine Kugel mit Hilfe einer Pistole gegen eine halboffene Thüre abschiesse, so werde sie einfach hindurchdringen, die Thüre sich aber nicht bewegen; schleudere man aber mit derselben Kraft ein grosses Gewicht gegen die Thüre, so werde diese sich bewegen, weil im ersten Falle die Bewegung der Kugel nur wenigeren Teilen der Thüre mitgeteilt werde als im letzteren. Das Beispiel ist aber — ich kann es nicht unterlassen, dies hier zu bemerken — nicht richtig, denn ist wirklich die der Kugel und dem Gewichte innewohnende Kraft die nämliche, wie doch vorausgesetzt wird, so ist gar kein Grund vorhanden, warum letzteres nicht ebenso gut die Thüre durchbohren sollte als erstere; und ob die Thüre bewegt wird oder nicht hängt nach meiner Ansicht in beiden Fällen lediglich von dem Widerstande des Materiales ab. Das Beispiel kann demnach gar nichts beweisen, denn es beruht auf Behauptungen, die selbst des Beweises bedürfen und damit scheint mir auch der ganze gegen Polen gemachte Einwurf hinfällig zu sein.

Um nun das oben Gesagte zu illustrieren, gibt Desaguliers folgendes Experiment an: In einem Apparate waren sechs parallele Papierflächen horizontal aufgespannt; darüber wurde in einer Entfernung von 4 Fuss eine Elfenbeinkugel, die etwas mehr als 1½ Unzen wog, aufgehängt; fiel der Ball

herab, so durchbrach er 4 Papierflächen. Brachte man aber in eine Öffnung des Balles Blei, so dass er nochmal so schwer war wie vorher, und liess ihn nur einen Fuss hoch fallen, so durchbrach er nur 2 Flächen. Lässt man die Höhe im Verhältnisse 1 : 4, den Ball in dem von 1 : 2 wachsen, so durchbricht dieser immer nur die halbe Zahl Flächen, wie gross sonst Höhen und Gewichte sein mögen. Es ist das also ein ähnliches Experiment wie das Pembertons (s. S. 55). Dieses spreche nun gegen Polens Theorem; denn nicht deshalb durchbreche der leichtere Ball mehr Flächen, weil er mehr Kraft oder Bewegungsgrösse habe, sondern weil jede Fläche nur die Hälfte Zeit habe, ihm Widerstand zu leisten, da er ja mit doppelter Geschwindigkeit fällt. — Kein Mensch, der die Sache genau betrachte, werde zwischen lebendiger und toter Kraft unterscheiden, das ergebe sich aus all den Versuchen: denn zwischen Kraft und Bewegungsgrösse sei kein Unterschied; man müsste höchstens eine Maschine so einrichten, dass sich ihre Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten.

Man denke sich zwei Bälle A und B, die an einem Seile befestigt seien, das durch eine Öffnung eines Tisches gehe und unten das Gewicht P trage. Wenn nun die Kugeln ihren Platz ein wenig ändern, so werden sie sich mit gleicher Kraft gegen C bewegen, weil jede von ihnen gegen C mit der Hälfte des Gewichtes gezogen wird, seien die Bälle gleich oder ungleich. Wenn jeder Ball zwei Unzen wiege und sie wären je 12 Zoll von C entfernt, so kämen sie losgelassen in derselben Zeit nach C. Dann können aber die Kräfte nach der einfachen Geschwindigkeit oder nach ihrem Quadrate gemessen werden. Sobald man aber die Bälle oder die Entfernungen ungleich nehme, könne letzterer Wert nimmer gelten — d. h. doch, er könne überhaupt nicht gelten.

Zu all diesen Experimenten möchte ich nun Folgendes bemerken: Die mit der Waage angestellten Versuche zeigen gerade die Richtigkeit des Leibnitzschen Mafses; denn die

Wirkung von Kräften hängt nicht bloss von ihrer Grösse, sondern auch von ihrem Angriffspunkte ab. Im Falle des Gleichgewichtes können also die Kräfte im allgemeinen nicht gleich gross sein; sie werden sich vielmehr verhalten müssen wie die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte und das ist in der That nach Leibnitz der Fall; denn $K : \varkappa = MV^2 : mv^2$; aber $M : m = v : V$; also $K : \varkappa = V : v$. Was ferner die Versuche mit den Stössen von Kugeln anbelangt, so wird weiter unten ihre Unhaltbarkeit sich ergeben und die übrigen sind eben doch von Nebenumständen so sehr abhängig, dass sich aus ihnen weder für die Richtigkeit des einen noch für die des anderen Mafses ein bestimmter Schluss ergeben wird.

XVI. Auch in Frankreich entbrannte um eben diese Zeit der Kampf von Neuem, als die Academie des sciences royale im Jahre 1724 die Preisfrage stellte: Quelles sont les loix suivant lequelles un corps parfaitement dur mis en mouvement en meut un autre de meme roture soit en repos soit en mouvement qu'il rencontre soit dans le vide soit dans le plein.

Johann Bernoulli aus der berühmten Mathematikerfamilie bearbeitete dieselbe und veröffentlichte sie unter dem Titel: Discours sur les loix de la communication de mouvement (op. omn. T. III p. 7) und gab damit den Anstoss zu einer ganzen Reihe von Arbeiten über unser Thema, welche nun der Betrachtung unterzogen werden mögen. Natürlich kann es mir ebensowenig wie bei den vorhergehenden Aufsätzen in den Sinn kommen, dieselben wörtlich mitzuteilen. Ich werde vielmehr nur den Hauptgedankengang mitteilen und nur besonders wichtige Stellen im Wortlaute mitteilen.

Bernoulli schickt einige Definitionen voraus: Unter virtueller Geschwindigkeit verstehe er diejenige, welche zwei oder mehrere Kräfte, die im Gleichgewichte sind, erhalten,

wenn ihnen eine kleine Bewegung mitgeteilt wird. Sie ist das Element der Geschwindigkeit, welche jeder Körper erlangt oder verliert von einer bereits vorhandenen Geschwindigkeit in unendlich kleiner Zeit und zwar in ihrer Richtung.

Lebendige Kraft ist diejenige, welche in einem Körper zurückbleibt, wenn er in gleichförmiger Bewegung ist, und tote Kraft diejenige, welche ein Körper ohne Bewegung erhält, wenn er angeregt und gezwungen wird, sich zu bewegen oder sich rascher oder langsamer zu bewegen, falls er schon in Bewegung war.

Zwei Agentien sind im Gleichgewichte oder haben gleiche Momente, wenn sich ihre absoluten Kräfte umgekehrt verhalten, wie ihre virtuellen Geschwindigkeiten. Daran schliesst sich nun sofort ein Beweis für die Richtigkeit des neuen Kräftemafses. Man denke sich zwei Kugeln A und B, welche durch eine Feder verbunden sind; der gemeinsame Schwerpunkt sei in C. Dann wird der Teil der Feder zwischen C und B, während sie sich ausdehnt, lediglich dazu dienen, den Körper B zu bewegen; dagegen der Teil zwischen C und A dient zur Bewegung der Kugel A. Die lebendige Kraft von B, welche der Totaleffekt des Teiles C B der Feder ist, verhält sich zu der von A wie die Länge C B zur Länge C A oder wie die Geschwindigkeit von B zu der von A. Wiewohl also die Bewegungsgrössen der beiden Kugeln gleich sind, sind keineswegs ihre lebendigen Kräfte auch gleich; sie verhalten sich vielmehr wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten; denn wenn f die lebendige Kraft von A, F die von B ist, so ist, wenn man die Geschwindigkeiten mit a und b bezeichnet $f : F = a : b$; da aber $A\,a = B\,b$, so ist $f : F = A\,a^2 : B\,b^2$. Bernoulli kommt also hier auf jenes Beweismittel zurück, welches Leibnitz in seinem specimen dynamicum bereits angedeutet, aber als nicht ganz bequem verschmäht hatte, wie Seite 36 erwähnt wurde.

Dass aber die Bewegungsgrösse nicht immer dieselbe bleiben könne, zeigt Bernoulli auf folgende Weise: Die Richtungsgrösse (quantité de direction) d. h. das Produkt aus der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes in die Summe der Massen bleibe beim Zusammenstosse zweier elastischen Kugeln immer dieselbe vor und nach dem Stosse. Dann könne aber die Bewegungsgrösse nicht immer dieselbe bleiben und zwar 1) nicht, wenn die Körper sich vor und nach dem Stosse in derselben Richtung bewegen und 2) nicht, im Falle die Richtungsgrösse 0 sei, d. h. wenn der Schwerpunkt keine Bewegung habe, weil sich dann jeder von den Körpern mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit bewege.

Es folgt nun ein bemerkenswertes Kapitel: De la force vive des corps qui sont en mouvement. Die tote Kraft besteht in einer blossen Anstrengung (effort) und kann bestehen, auch wenn ein äusserliches Hindernis den Körper an örtlicher Bewegung hindert. Ein Beispiel hiefür ist die Schwere; sie teilt dem Körper in jedem Augenblicke eine unendlich kleine Geschwindigkeit mit, die aber sofort durch den Widerstand des Hindernisses aufgehoben wird. Die tote Kraft hat insbesondere die Eigenschaft, dass sie keinen Effekt erzeugt, der länger dauert als sie selbst.

Die Natur der lebendigen Kraft ist aber eine ganz andere; sie kann weder momentan entstehen noch vergehen wie die tote Kraft. Die lebendige Kraft entsteht immer in einem Körper, wenn er, vorausgesetzt dass kein Hindernis vorhanden ist, durch einen Druck in eine lokale Bewegung gerät. Diese Bewegung erreicht er in unendlich kleinen Zunahmen und sie steigt bis zu einer gewissen endlichen Geschwindigkeit, welche so lange gleichförmig bleibt, bis die Ursache, welche ihn in Bewegung setzte, aufhört. Lebendige Kraft ist also etwas Reelles: sie ist äquivalent dem Teile der Ursache, welcher aufgezehrt wird indem er sie erzeugt, weil jede Ursache gleich sein muss dem vollen Effekte.

Die Definition stimmt also vollständig mit der Leibnitzens überein.

Ein Körper, welcher diese Kraft erlangt, setzt ihr nur den Widerstand entgegen, welcher von seiner Trägheit abhängt, fortwährend proportional seiner Masse.

Lebendige und tote Kraft verhalten sich wie Linie und Fläche oder wie Fläche und Körper.

Die tote Kraft vermindert keineswegs die Kraft, welche aus irgend einem Grunde wirksam ist; der blosse Druck, welchen z. B. eine Feder auf ein unbewegliches Hindernis ausübt, vermindert die Kraft der Feder nicht; ihre Kraft wird aber verzehrt, wenn sie sich ausdehnt. Weil Ursache und Wirkung gleich sein müssen, so muss die lebendige Kraft eines Körpers, welche bei Ausdehnung einer Feder erzeugt wurde, im stande sein, diese Feder genau auf denselben Grad von Kraft zu bringen, welchen sie hatte.

Diese Gleichheit von Ursache und Wirkung ist auch der Grund für die Erhaltung der Kraft in Körpern, welche sich bewegen. Lange Zeit glaubte man, dass fortwährend die gleiche Bewegungsgrösse erhalten bleibe. Dieser Irrtum entstand aus der Verwechslung von lebendiger und toter Kraft; denn indem man sah, dass das Fundamentalprinzip der Statik erforderte, dass die Momente sich verhalten wie die Kräfte und virtuellen Geschwindigkeiten, dehnte man es fälschlich dahin aus, dass man es auch auf Kräfte von Körpern anwendete, welche in aktueller Bewegung sind. Leibnitz hat zuerst auf diesen Unterschied hingewiesen. Bezüglich der Verbreitung der Leibnitz'schen Theorie ist die hier angefügte Bemerkung Bernoullis hervorzuheben: „Kurz vor seinem Tode wurde seine Ansicht neuerdings bekämpft und sogar getadelt; man hängte sich an eine Sammlung von Briefen zwischen Leibnitz und Clarke, (die mir leider im Originale nicht zugänglich war; einige Notizen daraus werde ich später mitteilen). Es ist wahr, die Anzahl

seiner Anhänger ist sehr gering in Europa; vielleicht bin ich sein einziger seit etwa 28 Jahren, nicht etwa weil mir seine Beweise stark genug erschienen, mich für seine Ansicht zu gewinnen; denn ich gestehe, dass sie mich, da sie indirekt sind und keineswegs dem Stoffe entnommen, um den es sich handelt, nicht überzeugen können; aber sie gaben mir Gelegenheit, darüber nachzudenken und nach langer und ernstlicher Uberlegung fand ich dennoch das Mittel mich selbst zu überzeugen durch direkte Beweise und ohne jede Ausnahme. Leibnitz, welchem ich sie mitteilte, wusste mir Dank dafür; sie gewannen ihm auch Anhänger."

Im folgenden Kapitel, welches den Titel trägt: ‚En quoi consiste la mesure des forces vives' teilt er diese Beweise mit.

Wir denken uns eine Feder ohne Materie und Gewicht und betrachten an ihr nur die Gestalt und die Elasticität. Denkt man sich nun zwei Federn; die eine stemme sich mit dem einen Ende gegen eine starre Ebene, mit dem anderen drücke sie gegen einen Körper P; die andere drücke an beiden Enden gegen die beweglichen Körper R und S; dann wird der Widerstand P ebenso gedrückt wie jeder der Widerstände R und S; denn der passive Widerstand der starren Ebene fliesst ebenso auf P über, wie der aktive Widerstand von R auf S und umgekehrt. Hat man also eine Reihe von Federn so, dass jede folgende sich gegen die vorhergehende stemmt und deren erste sich auf eine feste Wand stützt, dann ist die Kraft, welche jener widersteht und sie hindert sich zu öffnen, gerade so gross wie die Kraft, welche einer einzigen von diesen Federn Widerstand leistet. Hat man also zwei Reihen gleicher und gleich gespannter Federn, die eine von 12, die andere von 3 Federn, welche sich gegen feste Punkte stützen und deren Enden durch Kugeln aufgehalten sind, so werden diese beiden Kugeln nach dem Vorhergehenden gleichmässig gedrückt und sind also ihre toten Kräfte gleich.

Wenn sich nun die beiden Kräfte, welche an den Kugeln gegen die Federn wirken, plötzlich zurückziehen, so werden die Kugeln den Federn keinen Widerstand mehr leisten ausser ihrer Trägheit; sie werden sich bewegen; aber die eine wird durch 12 Federn mehr Geschwindigkeit erlangen als die andere durch 3, vorausgesetzt die Kugeln sind gleich; denn die letzteren 3 von den 12 Federn können sich nur dadurch ausdehnen, dass sich auch gleichzeitig die vorhergehenden 9 ausdehnen; also werden sie ihrer Kugel eine grössere Geschwindigkeit mitteilen, als die 3 Federn, welche allein auf die Kugel wirken. Derjenige Körper nun, welcher die grössere Geschwindigkeit hat, hat auch die grössere Kraft. Während also die toten Kräfte gleich waren, sind es die lebendigen nicht; also können diese beiden Kräfte nicht gleicher Natur sein. Die lebendigen Kräfte können also nicht proportional sein den Produkten aus Masse und Geschwindigkeit.

Es folgt im siebenten Kapitel der Beweis, dass die lebendigen Kräfte sich verhalten wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Man denke sich zwei Reihen von Federn, die eine z. B. mit 3, die andere mit 12 Federn, beide stossen mit dem einen Ende an ein festes Hindernis, das andere sei frei. Bei beiden Reihen mögen die einzelnen Schenkel in jedem Augenblicke gleiche Winkel bilden; endlich mögen beide Reihen gleiche Bewegliche vor sich hertreiben. Dann verhalten sich die Geschwindigkeiten, welche die Federreihen den Kugeln mitteilen, nicht wie die Zahlen der Federn, sondern wie die Quadratwurzeln aus denselben, also wie $\sqrt{12} : \sqrt{3} = 2 : 1$.

A C und B D bezeichnen die Längen zweier beliebigen Federreihen; beide stossen mit ihren Enden C und D gleiche Kugeln. Die Abscissen der Kurven C L und D K bezeichnen die von den Kugeln zurückgelegten Wege, die Ordinaten

ihre Geschwindigkeiten in den betreffenden Punkten. Sei $BD = a$; $DH = x$. $NT = dx$; $HN = u$ und $TO = du$. Die Abscissen seien so gewählt, dass sie sich verhalten wie die Längen der Reihen; also $AC = na$ etc. Dann stehen die Zahlen der Federn, die absoluten Kräfte der Federreihen und die Kräfte, welche jede derselben auf ihre Kugel ausübt im Verhältnisse $1 : n$; es ist also $CG = nx$; $MV = ndx$; endlich sei $GM = z$. Da also $AC : CG = BD : DH$, so oft die Endpunkte der Federreihen zu den Punkten G und H gekommen sind, so werden die beiden Reihen immer gleichweit geöffnet sein; also wird bei jeder einzelnen Feder der gleiche Teil an Kraft verloren sein und ein anderer gleicher Teil zurückbleiben. Also werden die Kräfte p gleich sein. Aber der elementare Geschwindigkeitszuwachs in H nämlich $du$ ist zusammengesetzt im Verhältnisse der toten Kraft oder des Druckes p und der unendlich kleinen Zeit, welche die Bewegung braucht, um $HP = dx$ zu durchlaufen $HP : HN = dx : u$; also $du = \frac{p\,dx}{u}$; $u\,du = p\,dx$; und also $\frac{1}{2} u^2 = \int p\,dx$. Ebenso $dz = p \cdot \frac{GE}{GM} = p \cdot \frac{n\,dx}{z}$; $z\,dz = p \cdot n\,dx$; $\frac{1}{2} z^2 = n \int p\,dx$: also $u^2 : z^2 = 1 : n = a : na = BD : AC$. Aber diese verhalten sich wie die in G und H erlangten lebendigen Kräfte; also verhalten sich die lebendigen Kräfte wie die Quadrate aus den Geschwindigkeiten und diese wie die Wurzeln aus den Zahlen der Federn.

Nimmt man die Linien AC und BD unendlich lange im Verhältnisse zu den durchlaufenen Wegen CG und DH, so wird der Druck p gleich und gleichmässig sein in der ganzen Ausdehnung des Weges, welchen das Bewegliche durchlaufen muss; denn wenn CG und DH unendlich klein sind im Verhältnisse zu AC und BD, so verliert jede Feder nur

einen unendlich kleinen Teil ihrer Spannung und dann werden die Kräfte p in der ganzen Ausdehnung der Linien C G und D H gleich sein. In diesem Falle ist $\int p\,dx = px$; $\frac{1}{2}v^2 = px$; $\frac{1}{2}z^2 = npx$. Die beiden Kurven sind dann Parabeln vom gleichen Parameter 2 p; denn in C ist $\frac{MG^2}{CG} = \frac{2npx}{nx} = 2p$ und in D ist $\frac{NH^2}{DH} = \frac{2px}{x} = 2p$. Die Beschleunigung der Kugel folgt also demselben Gesetze wie ein fallender schwerer Körper, weil sich die Quadrate der Geschwindigkeiten auch verhalten wie die vom fallenden Körper durchlaufenen Wege und weil wie die Schwere konstant ist für irgend eine Höhe, welche der Körper durchläuft, auch der Druck der gleiche ist auf der ganzen Länge ihres Weges. Es wird also auch erlaubt sein, das was von den beiden Kugeln bezüglich ihrer lebendigen Kraft bewiesen wurde, auf schwere Körper anzuwenden, welche aus verschiedenen Höhen fallen, dass sich ihre lebendigen Kräfte nämlich verhalten wie die durchlaufenen Höhen.

Und dieser Beweis rechtfertigt also die Art, deren sich Leibnitz bediente, um lebendige Kräfte zu messen.

Im nächsten, achten Kapitel teilt Bernoulli neue Beweise und Experimente mit, welche das Leibnitz'sche Mafs der lebendigen Kräfte bestätigen, als experimentellen Beweis zunächst den, dass mehrere Kugeln, welche an Grösse einander gleich, an Gewicht ungleich sind, auf eine weiche Masse fallend, immer gleiche Grübchen hervorbringen, wenn man sie aus Höhen fallen lässt, die ihren Massen reciprok proportional sind. Man schliesst daraus, dass die Kugeln im Momente des Anfangs ihres Eindringens gleiche Kraft haben; die Geschwindigkeiten aber verhalten sich wie die Wurzeln aus den Höhen. Daraus folgt, dass die lebendigen Kräfte

zweier Körper gleich sind, wenn sich ihre Massen umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Ein anderer Beweis ist dem schiefen Stosse der Körper entnommen. Man denke sich zwei völlig gleiche elastische Kugeln A und C. C sei in Ruhe und werde von A in der Richtung A B gestossen und zwar so, dass A B mit der gemeinsamen Tangente an B und C einen halben rechten Winkel einschliesse. Die Bewegung A B zerlege man in A F und F B, dann wird A, wenn sie in B angekommen ist, ihre Bewegung in der Richtung B F verlieren und nur die in der Richtung A F beibehalten; sie muss sich also in der Richtung B E ⌗ A F mit einer Geschwindigkeit B E = A F fortbewegen, während C in der Richtung F B eine Geschwindigkeit C D = F B = A F erlangen wird. Die Kraft der Kugel A ist also in zwei gleiche Teile zerlegt. Die Kraft der Kugel A verhält sich also zu der ihr gleichen Kugel C wie $2 : 1 = AB^2 : BF^2$, d. h. wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Der Beweis lässt sich auch umkehren, indem man zwei gleiche Kugeln D und E mit gleichen Geschwindigkeiten in aufeinander senkrechten Richtungen sich bewegen lässt, so dass sie im Punkte B zusammentreffen; dann wird C stehen bleiben, E sich aber in der Richtung B A fortbewegen und die Geschwindigkeiten werden sich wieder verhalten wie $2 : 1 = AB^2 : BF^2 = AB^2 : DC^2$.

Vielleicht behaupte man, dass Alles, was man aus diesen beiden Beweisen schliessen könne, darin bestehe, dass die lebendigen Kräfte gleicher Körper unter den gegebenen Umständen sich verhalten wie 2 : 1 und ihre Geschwindigkeiten wie $\sqrt{2} : \sqrt{1}$. Zugegeben! aber um so weniger dürfe man leugnen, dass sie unfehlbar die Falschheit der gewöhnlichen Ansicht beweisen.

Daran reiht sich im neunten Kapitel ein allgemeiner und geometrischer Beweis des Theorems von den lebendigen Kräften.

1. Ein Körper, welcher so viel Geschwindigkeit hat, um eine Feder zu schliessen, kann mit der doppelten Geschwindigkeit nicht 2, sondern 4, mit dreifacher 9 Federn schliessen.

2. Man stelle sich vor, der Körper stosse schief gegen eine in L befindliche Feder mit der Geschwindigkeit $CL = 2$; ferner sei $\sphericalangle CLP = 30^0$ und der Widerstand der Feder L gerade so gross, dass ein Körper C die Geschwindigkeit 1 haben muss, wenn er senkrecht darauf stossend sie schliessen soll. C bewege sich auf einer Horizontalebene. Dann zerfällt CL in die Componenten $CP = 1$ und $PL = \sqrt{3}$. C wird die senkrechte Bewegung CP völlig verlieren und nur PL wird erhalten bleiben. Es wird sich also in der Richtung LM mit der Geschwindigkeit $LM = PL = \sqrt{3}$ fortbewegen. Dort (in M) sei eine ähnliche Feder angebracht und zwar unter einem solchen Winkel LMQ, dass $LQ = 1$ wird; dann wird LQ, welches die senkrechte Bewegung gegen die Feder M darstellt, zur Schliessung derselben verbraucht, während die Bewegung in der Richtung QMN mit der Geschwindigkeit $MN = QM = \sqrt{2}$ fortdauert. In N sei eine dritte Feder gleich den vorigen. $\sphericalangle MNR = 45^0$ also $MR = 1$; dieses wird aufgehoben und die Bewegung dauert mit der Geschwindigkeit $NO = NR = 1$ fort in der Richtung RNO. Der Körper hat also jetzt die drei Federn L, M, N geschlossen und besitzt noch die Geschwindigkeit 1, mit welcher er nun die vierte Feder O, gegen welche er senkrecht stösst, schliessen kann.

Aus dem Allen ergibt sich, dass der Körper C mit der Geschwindigkeit 2 die Fähigkeit hat, 4 Federn zu schliessen, deren jede zu ihrer Schliessung die Geschwindigkeit 1 erfordert. Darin besteht aber auch der Totaleffekt der Kraft des Körpers C. Und die Schliessung einer einzigen Feder ist der Totaleffekt des nämlichen Körpers, wenn er sich mit der Geschwindigkeit 1 bewegt nach Annahme. Weil sich aber die Totaleffekte wie

die lebendigen Kräfte verhalten, welche sie hervorbringen, so muss also notwendig die lebendige Kraft des Körpers C, wenn er die Geschwindigkeit 2 hat, viermal so gross sein, als wenn er die Geschwindigkeit 1 besitzt. Man kann ebenso beweisen, dass eine 3 fache, 4 fache . . . . . n fache Geschwindigkeit dem Körper C eine 9, 16 . . . . . $n^2$ fache Kraft mitteilt, weil er in diesem Falle im stande ist 9, 16 . . . . . $n^2$ Federn zu schliessen. Man braucht bloss dem C L eine passende Richtung zu geben, so dass C P : C L = 1 : 3 (1 : 4 . . . . . 1 : n) und die übrigen Richtungen wie oben zu bestimmen. Damit ist aber der Satz allgemein bewiesen.

Drei Gesetze erfüllen sich bei jedem direkten Stosse zweier Körper; sie bestehen 1) in der Erhaltung der Geschwindigkeit vor und nach dem Stosse, 2) in der Erhaltung der Bewegungsrichtung, welche immer gleich ist dem Produkte der Summe der Massen in die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes, 3) in der Erhaltung der Grösse der lebendigen Kraft. Die Idee, welche wir von der lebendigen Kraft haben, insoferne sie in einem bewegten Körper existiert, ist etwas Absolutes, Unabhängiges und so positiv, dass sie sogar in dem Körper bliebe, wenn auch der Rest des Universums zu Grunde ginge. Es ist doch klar, dass, wenn die lebendige Kraft eines Körpers beim Zusammenstosse mit einem anderen sich vermehrt oder vermindert, die dieses anderen um die nämliche Grösse vermindert oder vermehrt werden muss, und dies bringt notwendig die Erhaltung der Gesamtgrösse der lebendigen Kraft mit sich, weil diese Grösse durch den Stoss der Körper nicht verändert wird.

Den Zusammenhang dieser drei Gesetze kann man hübsch auf folgende Weise zeigen: Die beiden Körper A und B haben vor dem Stosse die Geschwindigkeiten a, b, nach demselben x, y; sie sollen sich in der nämlichen Richtung bewegen, dann ist nach dem ersten Gesetze

$$a - b = x - y;$$ nach dem zweiten
$$Aa + Bb = Ax + By;$$ also
$$a + x = b + y$$ und
$$A(a - x) = B(b - y)$$ folglich
$$A(a^2 - x^2) = B(b^2 - y^2)$$ oder
$$Aa^2 + Bb^2 = Ax^2 + By^2,$$
was das dritte Gesetz ist.

Diese Übereinstimmung zwischen Natur und Geometrie kann man nur bewundern. Würde irgend ein anderes Gesetz bestehen, so hätte sich die Grösse der lebendigen Kraft, die Quelle des Fortbestehens des Universums, nicht erhalten können. —

Die Einführung der Federn und Federreihen in die Zahl der Beweismittel für das neue Mafs der Kräfte durch Bernoulli, dessen oben erwähnter Beweis wenigstens in den Augen seiner Anhänger lange als unwiderlegbar galt, hat den Kampf um das Mafs der Kräfte keineswegs erleichtert, sondern im Gegenteile komplizierter gemacht. Wir werden nämlich im Laufe der Darstellung sehen, dass Viele mit Hilfe elastischer Federreihen gerade das Gegenteil dessen bewiesen, was Bernoulli gezeigt hatte. Der Grund hiefür ist darin zu suchen, dass die Einen annehmen, die Teile einer Feder oder Federreihe, welche nach beiden Seiten wirken, verhielten sich umgekehrt wie die von ihnen bewegten Massen, während die Anderen der Ansicht waren, die Feder, welche bei ihrer Ausdehnung eine bestimmte lebendige Kraft erlange, werde hiebei in zwei gleiche Teile zerlegt — zwei Anschauungen, für welche sich sowohl auf experimentellem wie auf intellektivem Wege schwer eine Entscheidung treffen lässt, wenn man nicht vielleicht zu Gunsten der ersteren etwa Folgendes anführen darf: Denkt man sich den Mittelpunkt einer Federreihe als fest, so ist kein Grund vorhanden, warum nicht die eine Hälfte auf die eine und die andere auf die andere Kugel wirken sollte, wenn auch beide Kugeln verschiedene Masse besitzen. Sobald aber

der Mittelpunkt nicht mehr befestigt ist, wird sich die Hälfte, welche gegen die kleinere Kugel wirkt, rascher öffnen, als die andere, woraus folgt, da ja die Öffnung der ganzen Feder gleichzeitig erfolgt, dass auch noch Teile der anderen Hälfte mit ihrer Wirkung die erstere unterstützen werden, weil die grössere Masse ein gleich rasches Öffnen der Federn der letzteren Hälfte nicht zulässt. Auf diese Weise lässt sich wenigstens einsehen, dass nicht der Mittelpunkt der Reihe der Teilpunkt der Wirkungen sein kann, wenn sich auch die Lage dieses Punktes auf diesem Wege nicht in überzeugender Weise zeigen lässt. Übrigens hat Kant das Problem der Federreihen in solch gründlicher Weise untersucht, dass ich mich an dieser Stelle nicht weiter damit zu beschäftigen brauche. Es sollte hier nur darauf verwiesen werden, dass mit Hilfe der Federreihen, deren Theorie eine ganze Literatur zu Tage förderte, die Lösung des Problems der lebendigen Kräfte wenn möglich noch schwieriger wurde, als es an und für sich war. —

XVII. Merkwürdig ist, dass bereits Huyghens in seiner Abhandlung de motu corporum ex percussione Artikel XI. (op. Tom. II.) 1669 das dritte der eben erwähnten Gesetze für einen speziellen Fall bewiesen hatte; ich glaube, es ist hier die passendste Stelle, diesen Beweis mitzuteilen; er zeigt dort, dass die Summe der Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse zweier Körper, falls sie sich entgegenlaufen, die gleiche sei. Die beiden Körper A, B mögen vor dem Stosse die Geschwindigkeiten $AD$, $BD$, nach demselben $AE$, $BE$ haben; $AB$ sei in C so geteilt, dass $BC : CA$ sich verhält wie die Masse von B zu der von A; ferner sei $CE = ED$; dann ist zu beweisen, dass $BC \cdot \overline{AD}^2 + CA \cdot \overline{BD}^2 = BC \cdot \overline{AE}^2 + CA \cdot \overline{BE}^2$. Jedenfalls fällt entweder C zwischen A und D oder D zwischen A und C. Im ersten Falle ist $AD = AC + CD$; $AE = AC - CD$; also $AD > AE$; $BE = BC + CE$;

$BD = BC - CD$; $BE > BD$; im zweiten Falle aber $AE > AD$ und $BD > BE$. Ferner ist in beiden Fällen $\overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = 4 \cdot AC \cdot CD = 4 \cdot AC \cdot CE$ und $\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2 = 4 \cdot BC \cdot CE$. Aber $4 \cdot BC \cdot CE : 4 \cdot AC \cdot CD = BC : AC \cdot$ also $\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2 : \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = BC : AC$; also $(\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2) AC = (\overline{AD}^2 - \overline{AE}^2) \cdot BC$. Der Beweis fusst also auf dem Prinzipe, dass die Summe der Geschwindigkeiten zweier aufeinanderstossenden Körper vor und nach dem Stosse die gleiche ist, ein Prinzip, welches von beiden Parteien anerkannt wurde.

XVIII. Ein zweiter eifriger Verteidiger des Leibnitzschen Kräftemafses erhob sich in dem Marburger Professor Christian Wolf, welcher bereits in seinen Elem. mech. für dasselbe eingetreten war, insbesondere aber in der Schrift Principia dynamica, welche in den Comment. Petrop. Tom. I. erschien, lebhaft dafür Partei ergriff. Zum Verständnisse seines Beweises ist es unerlässlich, den Gedankengang dieser letzteren Arbeit hier mitzuteilen.

Leibnitz sagte bekanntlich, wie wir oben gesehen haben, dass er zu seinem neuen Mafse der Kräfte a priori durch eine einfache Betrachtung von Raum, Zeit und Kraft gekommen sei. Das veranlasste Wolf, ein Mafs der Kräfte aus einer gleichmässigen Bewegung zu finden. Und er fand, dass bei gleichmässiger Bewegung die Kräfte zu schätzen seien nach dem Produkte aus den Stössen in den Weg oder bei Annahme gleicher Beweglicher nach dem Produkte aus Geschwindigkeit und Raum. Daraus ergab sich aber offenbar Leibnitzens Mafs. Die Hauptfrage drehte sich nun darum, zu zeigen, wie sich ein Stoss auf den Raum übertragen lasse. Da aber eine fruchtbare Definition der Kraft nicht existierte, aus der man ihr Mafs finden konnte, so setzte er an ihre Stelle einige Axiomata. Ich will sie hier unmittelbar aufzählen.

Wenn zwei oder mehrere gleiche Körper sich mit derselben Schnelligkeit bewegen, so ist ihre Kraft dieselbe.

Von derselben Kraft wird in derselben Zeit dieselbe Wirkung hervorgebracht.

Wenn das nämliche Bewegliche durch den nämlichen Raum getragen wird, so ist der Effekt der nämliche.

Die Erklärungen hiezu erspare ich mir ebenso wie die Beweise zu den folgenden Lehrsätzen, weil sie meist leicht sind und nötigen Falles in den oben citierten Comment. eingesehen werden können.

Zu den obigen Axiomen kommen folgende Definitionen:

Lebendige Kraft oder kurz Kraft nennt Wolf diejenige, welche einer örtlichen Bewegung anhaftet.

Tote Kraft diejenige, welche bei einem blossen Versuche zu einer Bewegung existiert. Er nennt sie deshalb kurz Versuch (conatus).

Reine Kraft ist die, welcher bei der Wirkung kein Widerstand geleistet wird; sie bleibt also während ihrer ganzen Wirkungsdauer unverändert.

Reine Wirkung ist die, welche durch eine reine bewegende Kraft erzeugt wird.

Eine einfache Wirkung ist diejenige, welche sich in der n fachen Zeit ver n facht.

Der Effekt einer bewegenden Kraft ist also abgesehen vom Zusammenstosse eine Übertragung eines Beweglichen über einen Weg hin.

Diese Definition des Effektes steht in scharfem Widerspruche mit der von Papin (pag. 21) gegebenen, welcher sagt, es gebe keinen Effekt, wo kein Hindernis überwunden werde. Aber aus der metaphysischen Definition des Effektes ergebe sich sein Irrtum, meint Wolf. Jeder müsse zugeben, dass derselbe Effekt hervorgebracht würde, ob das Bewegliche durch eine Kraft oder von einem Menschen von A nach B gebracht werde. Übrigens sei das nur ein Name, über den man nicht zu streiten brauche; man könne die Übertragung

eines Beweglichen durch den Raum auch anders nennen als den Effekt einer bewegenden Kraft.

Rein ist der Effekt, wenn die Bewegung in einem nicht widerstehenden Mittel vor sich geht, ausserdem gemischt.

Ein Effekt ist schädlich, wenn durch ihn die bewegende Kraft absorbiert wird, ausserdem ist er unschädlich; ersterer findet statt beim Aufstiege schwerer Körper, bei Überwindung von Hindernissen, letzterer bei gleichförmiger Bewegung.

Darauf stützen sich nun folgende Lehrsätze:

Wenn sich ungleiche Körper (M, m) mit derselben Geschwindigkeit (c) bewegen, so verhalten sich ihre Kräfte (K, k) wie die Massen, also $K : k = M : m$.

Gleichförmige Wirkungen (A, a), welche in der gleichen Zeit (t) hervorgebracht werden, verhalten sich wie die Kräfte

$$A : a = K : k.$$

Bei gleicher Geschwindigkeit und gleicher Zeit ist demnach

$$A : a = M : m.$$

Gleichförmige Wirkungen durch gleiche Kräfte hervorgebracht, verhalten sich wie die Zeiten (T, t), in denen sie entstehen $A : a = T : t$.

Gleichförmige Wirkungen sind im Verhältnisse von Kräften und Zeiten zusammengesetzt

$$A : a = K \cdot T : k \cdot t.$$

Ungleiche Kräfte bringen dieselben Wirkungen hervor in Zeiten, welche ihnen reciprok proportional sind; denn wenn

$$A = a; \text{ so ist } K : k = t : T.$$

Bei gleicher Geschwindigkeit ist also auch $M : m = t : T$.

Wenn zwei gleiche Bewegliche sich über ungleiche Wege (S, s) bewegen, so verhalten sich die Effekte (E, e) wie die Wege $E : e = S : s$.

Wenn zwei ungleiche Bewegliche sich über denselben Weg bewegen, so verhalten sich ihre Effekte wie ihre Massen

$$E : e = M : m.$$

Bei gleicher Geschwindigkeit ist also auch $E : e = K : k$.

Wenn zwei beliebige Bewegliche sich über beliebige Wege bewegen, so verhalten sich die Effekte wie die Produkte aus Massen und Wegen

$$E : e = MS : ms.$$

Ist $E = e$, so ist $M : m = s : S$.

Bei gleichförmiger Bewegung verhalten sich demnach die Effekte wie die Produkte aus Masse, Geschwindigkeit und Zeit; denn $S : s = CT : ct$; also

$$E : e = MCT : mct.$$

Verhalten sich die Stösse I und i wie die Produkte aus Masse und Geschwindigkeit, so verhalten sich die unschädlichen Effekte wie die Produkte aus Stössen und Zeiten

$$E : e = I \cdot T : i \cdot t.$$

Wirkungen, durch welche dieselben Effekte hervorgebracht werden, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten

$$A : a = C : c;$$

denn bei gleichen Beweglichen verhalten sich die Wirkungen umgekehrt wie die Zeiten; $A : a = t : T$; bei gleicher Zeit ist also auch $K : k = C : c$; ..... bei verschiedenen Beweglichen ist aber $A : a = mt : MT$.

Wenn sich zwei bewegliche Körper mit der nämlichen Geschwindigkeit bewegen, so verhalten sich die Wirkungen wie die vollen Effekte

$$A : a = E : e.$$

Gleichförmige Wirkungen verhalten sich wie die Produkte aus den Effekten und Geschwindigkeiten

$$A : a = EC : ec.$$

Einfache Wirkungen verhalten sich wie die Stösse, welche auf die Wege verwendet werden, die bei gleichförmiger Bewegung durchlaufen werden, d. h. also wie die Produkte aus den Stössen in die Wege

$$A : a = EC : ec = MSC : msc = IS : is.$$

Da nun $S : s = C : c$

$I : i = MC : mc$, so ist $IS : is = MC^2 : mc^2$;

also auch $A : a = MC^2 : mc^2$, d. h. bei gleichförmiger Bewegung verhalten sich die Wirkungen wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Bei gleichförmiger Bewegung verhalten sich die Kräfte einfach wie die Massen oder wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; denn da $K : k = A : a$, so ist auch

$$K : k = MC^2 : mc^2.$$

Bei einer auf beliebige Art beschleunigten Bewegung verhalten sich die Kräfte am Ende einer beliebigen Zeit einfach wie die Massen und wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche am Ende jener Zeit erreicht wurden. Da nun schwere Körper, wenn sie über beliebige Höhe herabfallen, diejenigen Geschwindigkeiten erreichen, mit welchen sie zur nämlichen Höhe aufsteigen können, so verhalten sich die Kräfte geworfener Körper, mit welchen der Aufstieg beginnt, einfach wie die Massen, quadratisch wie die Geschwindigkeiten, welche sie beim Falle über die Höhe erreichen, zu denen sie aufsteigen.

Daran knüpft Wolf folgende Notiz:

Das ist jener Beweis, welchen ich unter Voraussetzung gleicher Beweglichen und unter Annahme des quadratischen Verhältnisses der Geschwindigkeiten im Jahre 1710 dem berühmten Grafen von Herberstein, dem angesehenen Leibnitz und anderen mitteilte, indem ich die bewegende Ursache durch Stösse mass, welche mit den Wegen multipliziert wurden und von welchem auch Leibnitz schrieb, dass er mit dem seinigen, welchen er dem berühmten Joh. Bernoulli, Jak. Hermann und anderen mitteilte, zusammenfalle (12. Jan. 1710) in einem Brief, in welchem er wörtlich mit folgenden Worten Zeugnis gibt:

„Die Berechnung reiner Kräfte oder Aktionen stelle ich in folgender Weise an: Sei der Weg s, die Zeit t, die Geschwindigkeit v, der Körper c, der Effekt e, die Kraft p, die Wirkung a. Bei gleichförmiger Bewegung wird $s = vt$;

$e = c \cdot s$; $a = p \cdot t$ sein und zwar kann dies ohne Beweis angenommen werden. Dazu kommt, was noch zu beweisen ist, dass $a = e \cdot v$; dann können aber sofort die meisten Lehrsätze bewiesen werden, z. B. dass $p = c \cdot v^2$; denn $p\,t = e\,v$, $e = c\,s$, $s = v\,t$; folglich $p\,t = c\,v^2 t$ oder $p = c\,v^2$. Bei gleichförmiger Bewegung wird auch die Sache gelingen; aber zumeist sind Dinge zu beurteilen, deren Verhältnisse aus elementaren Dingen zusammengesetzt sind, wobei denn das ganze Mafs kompliziert wird; und davon handelt ein Teil meiner Dynamik, welche zumeist von den wahrnehmbaren Dingen abstrahiert, aber durch Experimente bestätigt wird."

Wolf glaubt also, Prinzipien der Dynamik aufgestellt zu haben, welche mit dem Gedanken Leibnitzens übereinstimmen und durch welche der Weg zu Weiterem geebnet ist.

Das ist aber offenbar jener Beweis a priori, von welchem Leibnitz, wie wir gesehen haben, in seinen Abhandlungen über die lebendigen Kräfte wiederholt spricht, den er aber nirgends angibt und der ihm, wie es scheint, Schwierigkeiten bereitete, weil er auch hier noch im Jahre 1710 sagt, es sei erst zu beweisen, dass $a = e\,v$.

Ob Wolfs Schlüsse, aus denen sich ja die Richtigkeit dieser Gleichung ergibt, richtig sind, hat Kant untersucht und soll später davon die Rede sein. —

Bei Bewegung schwerer Körper oder bei gleichförmig beschleunigter Bewegung verhalten sich die Kräfte einfach wie die Massen und die Wege, welche die schweren Körper durchlaufen.

In einer unendlich kleinen Zeit, in welcher der Körper über einen unendlich kleinen Weg fällt, wird eine gleichförmige Bewegung vorausgesetzt und deshalb verhalten sich die Wirkungen A, a zweier Beweglichen M, m, welche über gleiche Höhen herabgefallen sind, wie die unendlich kleinen Zeiten $d\,T$ und $d\,t$ und wie die vollen Kräfte K, k, die sie im Fallen erlangt haben. Sie verhalten sich aber auch wie

die Produkte aus den Stössen M C und m c in die Wege d S und d s, welche sie beim Wiederaufsteigen in den Zeiten d T und d t mit den Geschwindigkeiten C, c, welche sie in den Zeiten T, t über die Wege S, s erlangt haben, durchlaufen würden. Also $K\,dT : k\,dt = MC\,dS : mc\,ds$ oder

$$KC\,dT : kc\,dt = MC^2\,dS : mc^2\,ds.$$

Bei gleichförmig beschleunigter Bewegung ist aber nach dem Satze des Galilei

$$C^2 : c^2 = dS : ds \text{ und}$$
$$C : c = dT : dt; \text{ also}$$
$$K\,dT^2 : k\,dt^2 = M\,dS^2 : m\,ds^2 \text{ oder}$$
$$dT\sqrt{K} : dt\sqrt{k} = dS\sqrt{M} : ds\sqrt{m}.$$

Wenn also in einer unendlich kleinen Zeit die Kräfte K, k und folglich auch die Massen M, m konstant sind, so wird

$$T\sqrt{K} : t\sqrt{k} = S\sqrt{M} : s\sqrt{m} \text{ oder}$$
$$T^2 K : t^2 k = S^2 M : s^2 m \text{ und weil}$$
$$T^2 : t^2 = S : s = C^2 : c^2, \text{ so wird}$$
$$KC^2 : kc^2 = MSC^2 : msc^2,$$
$$\text{also } K : k = MS : ms.$$

Also verhalten sich die Kräfte aufsteigender schwerer Körper wie die Produkte aus Massen und Höhen. Und das ist das Prinzip, welches bei der Schätzung der Kräfte von Leibnitz angenommen, von Papin und anderen aber bestritten wurde.

Da nun der Aufstieg eines schweren Körpers ein schädlicher Effekt ist, sich aber wie das Produkt aus Masse und Höhe verhält, so verhalten sich die Kräfte wie die schädlichen Effekte beim Aufstiege schwerer Körper nach Galileis Hypothese. Fälschlich wird also jeder Effekt der Ursache proportional angenommen.

Die nützlichen Effekte verhalten sich wie die Produkte aus den Zeiten in die Wurzeln aus Kräften und Massen.

$$E : e = MCT : mct; \; K : k = MC^2 : mc^2; \; C : c = \sqrt{\frac{K}{M}} : \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

also $$E : e = T\sqrt{MK} : t\sqrt{mk}.$$

Kräfte verhalten sich wie die Produkte aus den Effekten, welche in gleichen Zeiten hervorgebracht werden, in die Geschwindigkeiten.

$$E : e = MS : ms; \text{ also } K : k = MSC : msc.$$

Tote Kräfte verhalten sich wie die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten.

Nach Leibnitzens Gesetz der Kontinuität kann ein Versuch angesehen werden als bewegende Kraft eines bewegenden Körpers über einen unendlich kleinen Raum hin, d. h. in der That wie nichts; dann werden sich also, da in diesem Falle die Wege S und s nicht existieren, und wenn die reinen Kräfte sich verhalten wie $MSC : msc$, die Versuche verhalten wie $MC : mc$.

Es findet dies auch beim Hebel und bei anderen mechanischen Kräften statt. Leibnitz hat einen etwas anderen Grund angegeben, warum die toten Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind. Er meint nämlich, dass gerade beim Beginne der Bewegung die Abstiege oder die Grössen der im Herabfallen durchlaufenen Wege, die nämlich bis dahin unendlich klein oder elementar sind, den Versuchen herabzufallen proportional seien. Da er nun unsere Prinzipien als übereinstimmend mit den seinigen erkannte, so scheint er damals die Dynamik noch nicht aus den ersten Prinzipien abgeleitet zu haben. In der That sind weder die lebendigen Kräfte bei jeder Hypothese der schweren Körper den Wegen proportional, noch erhellt aus dem obigen Beweise, dass dies nur mit der Galileischen Hypothese stimme. Wenn man aber den Beweis allgemein auffasst, so wird klar sein, dass die Kräfte sich verhalten einfach wie die Massen, direkt wie die Quadrate der Wege und umgekehrt wie die Quadrate

der Zeiten (s. S. 81). Da nun nach der Annahme Galileis sich die Wege wie die Quadrate der Zeiten verhalten, so trifft es einzig und allein bei diesem Umstande zu, dass die Kräfte den Wegen proportional sind. —

XIX. Wolf hatte übrigens — wahrscheinlich als der erste — mit Hilfe der Gesetze des Stosses elastischer Kugeln die Unhaltbarkeit des Descartschen Satzes von der Erhaltung der Bewegungsgrösse nachgewiesen, — siehe dessen elementa math. univ. Tom. II cap. XII., — dagegen gezeigt, dass die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse die gleichen seien und zwar in folgender Weise: Wenn zwei Körper A, B sich in derselben Richtung bewegen, so werden sie nach dem Stosse durch die blosse Kraft des Antriebes die gemeinsame Geschwindigkeit $\frac{MC + mc}{M + m}$ besitzen, weil in diesem Falle sich zeigen lässt, dass die Bewegungsgrösse vor und nach dem Stosse die nämliche ist, da nämlich der eine Körper ebensoviel davon verliert als der andere gewinnt. Sind nun aber die Körper elastisch, so lässt sich vor Allem nachweisen, dass der Stoss gerade so geschieht, als wenn A mit der Geschwindigkeit $C - c$ auf den ruhenden B stiesse. Diese Geschwindigkeit wird nun im Augenblicke des Stosses so verteilt, dass die Geschwindigkeiten, welche nach dem Stosse durch die elastische Kraft erlangt werden, sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Auf diese Weise erlangt B die Geschwindigkeit $\frac{MC - Mc}{M + m}$ und A $\frac{mC - mc}{M + m}$. Weil nun aber die elastische Kraft den Körper A in entgegengesetzter Richtung zurück, B aber in derselben Richtung vorwärts treibt, so muss im ersten Falle die durch die elastische Kraft erlangte Geschwindigkeit von der durch den Stoss entstandenen subtrahiert, im zweiten aber addiert werden und man erhält auf diese Weise als die

wahre Geschwindigkeit des A den Wert $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$ und für B: $\frac{mc - Mc + 2MC}{M + m}$. Bewegen sich dagegen die beiden Körper in entgegengesetzter Richtung, so wird die Geschwindigkeit des ersteren $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$, die des letzteren $\frac{Mc - mc + 2MC}{M + m}$. Der ganze Beweis stützt sich freilich auf die Annahme, dass sich die Geschwindigkeiten im Augenblicke des Zusammenstosses umgekehrt verhalten wie die Massen; Wolf sucht dies dadurch zu erklären, dass die beiden Körper in jenem Augenblicke nur einen Körper bilden. Dies zugegeben, lassen sich die folgenden Thesen nun sehr leicht mathematisch nachweisen.

a) Wenn zwei Körper sich vor und nach dem Stosse entweder in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung bewegen, so ist im ersten Falle die Summe, im zweiten die Differenz der Bewegungsgrössen vor und nach dem Stosse die gleiche.

b) Wenn zwei elastische Körper sich vor dem Stosse in gleicher (entgegengesetzter), nach demselben aber in entgegengesetzter (gleicher) Richtung bewegen, so ist die Differenz (Summe) der Bewegungsgrössen nach dem Stosse gleich der Summe (Differenz) derselben vor dem Stosse.

c) Die Bewegungsgrösse bleibt also nur in dem unter a) angegebenen Falle die gleiche und wird in jedem anderen vermehrt oder vermindert; ersteres dann, wenn die Bewegung vor dem Stosse im gleichen, nach demselben im entgegengesetzten Sinne vor sich geht, letzteres im umgekehrten Falle.

Dagegen lässt sich mit Hilfe der oben entwickelten Werte für die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stosse ohne Weiteres zeigen, dass die Produkte aus den Massen

in die Quadrate der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse die gleichen sind, woraus sich ergibt, wie Wolf beifügt, dass die Grösse der lebendigen Kräfte in diesem Falle konstant ist.

## Dritter Abschnitt.

XX. In demselben Jahrgange (1725) der oben erwähnten Comment. Petropol. erschien eine weitere Verteidigungsschrift des Leibnitzschen Mafses von dem Professor Jakob Hermann, der als bedeutender Mathematiker auch von Leibnitz gerühmt wird. Sie hat den Titel De mensura virium corporum. Kraft bezeichnet Hermann als die Fähigkeit, Bewegung zu bewirken. Ein Körper, welcher in Wahrheit in Ruhe ist, kann keine solche Kraft besitzen; sondern besitzt nur die Kraft der Trägheit. Ein Körper ist aber nur dann wahrhaft in Ruhe, wenn er von jeder Bewegung verlassen ist. Es gibt nämlich Körper, welche, wenn sie auch wirklich nicht bewegt werden, dennoch das Bestreben zur Bewegung haben; solche sind nicht in Wahrheit in Ruhe. Es ist aber ein grosser Unterschied zwischen der Fähigkeit, eine aktuelle Bewegung zu erzeugen und derjenigen, sich in ein blosses Bestreben zur Bewegung umzusetzen. Man unterscheidet deshalb auch zwischen toten und lebendigen Kräften.

Ein Mafs für die toten Kräfte zu finden, ist nicht schwierig. Das Gewicht eines jeden Körpers ist das Mafs seiner toten Kraft. Es gibt aber noch eine andere Art von toten Kräften, die nicht aus dem Prinzip der Schwere hervorgehen, das sind die Centrifugalkräfte. Ein Körper, welcher sich nämlich auf einem Kreise oder sonst einer Kurve bewegt, hat fortwährend das Bestreben in der Richtung der Tangente von dieser Kurve abzukommen und dieses Bestreben ist eine tote Kraft. Aber auch diese toten Kräfte sind ihren Massen proportional. —

Was nun das Verhältnis der toten zur lebendigen Kraft betrifft, so sagen die angesehensten Autoren, die lebendige Kraft sei unbegrenzt im Gegensatze zur toten und suchen zu beweisen, dass die Kraft eines Stosses unendlich sei im Vergleich mit dem Gewichte eines Körpers. Genauer wäre es freilich, zu sagen, die Kraft eines Stosses und die der schweren Körper seien heterogene Grössen und deshalb eines Vergleiches gar nicht fähig, wie auch Cartesius ausdrücklich schreibt, dass die Kraft, welche hinreicht, ein Gewicht zu einer beliebigen Höhe zu heben, immer zwei Dimensionen habe, dasjenige aber, welches hinreicht, ein Gewicht an einem beliebigen Punkte dieser Höhe zu stützen, niemals mehr als eine Dimension besitze, so dass sich diese Kräfte unterscheiden wie Flächen und Linien und deshalb in kein Verhältnis treten können. Dasselbe gilt von der Kraft des Stosses und der Schwerkraft; denn diese ist eine tote, jene aber eine lebendige Kraft.

Hermann gibt nun eine kurze Geschichte des Kampfes um das Mafs der lebendigen Kräfte und fährt dann fort:

Das Mafs der Kräfte kann auch gewonnen werden aus den Regeln der Bewegung, welche beim Zusammenstosse zweier Körper eintreten. Es sei gegeben eine Kugel A mit der Geschwindigkeit 2, welche sich in einer Horizontalebene bewegend auf eine andere in Ruhe befindliche Kugel B = 3 A stosse; dann wird sie dieser die Geschwindigkeit 1 mitteilen und mit der Geschwindigkeit 1 wird A zurückkehren. Hierauf möge diese Kugel A mit ihrer Geschwindigkeit 1 auf eine andere ruhende Kugel C = A stossen, dann wird sie auch dieser die Geschwindigkeit 1 mitteilen und in Ruhe kommen. Dies Alles lässt sich leicht aus den bekannten Gesetzen der Bewegung elastischer Körper ableiten. Wir haben also hier eine Kugel A, welche durch zwei Stösse auf die in Ruhe befindlichen Kugeln B = 3 A und C = A die nämliche Geschwindigkeit sozusagen ausgiessend zur Ruhe

kommt und ihre Kraft verliert; sie vollbringt also dieselbe Wirkung, wie wenn sie der Kugel D = 4 A die Geschwindigkeit 1 mitgeteilt hätte; die nämliche Kugel A wird aber mit der Geschwindigkeit 1 einer anderen ihr gleichen durch einen Stoss diese Geschwindigkeit 1 mitteilen und dann zur Ruhe kommen; also verhält sich der Effekt der schnelleren zu dem der langsameren wie 4 A : A = 4 : 1, d. h. wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Ebenso verhält sich die Sache, wenn die Kugel A die Geschwindigkeit 3 besitzt; sie möge nämlich zuerst auf die ruhende Kugel B = 5 A stossen und nach diesem Stosse mit der Geschwindigkeit 2 zurückkehren; auf B aber wird sie die Geschwindigkeit 1 übertragen. Es möge zweitens die Kugel A mit der übrigen Geschwindgkeit 2 auf die ruhende Kugel C = 3 A stossen und wiederum nach diesem Stosse einen Verlust an Geschwindigkeit gleich 1 erleiden; die Kugel C aber wird die Geschwindigkeit 1 erlangen. Also wird für die Kugel A noch die Geschwindigkeit 1 bleiben; wenn sie nun endlich mit dieser Geschwindigkeit auf eine gleiche, aber ruhende Kugel D stösst, so wird sie nach diesem Stosse zur Ruhe kommen und D wird die Geschwindigkeit 1 erlangen. Die Kugel A kann also mit der Geschwindigkeit 3 ihre ganze Kraft auf die Kugeln B = 5 A, C = 3 A und D = A übertragen, so dass sie jeder von ihnen die Geschwindigkeit 1 mitteilt; aber die nämliche Kugel A kann mit der Geschwindigkeit 1 ihre ganze Kraft auf eine ihr gleich ruhende Kugel übertragen. Also verhält sich die Kraft der Kugel A, wenn sie die Geschwindigkeit 3 hat, zur Kraft der nämlichen Kugel mit der Geschwindigkeit 1 wie 5 A + 3 A + 1 A : A = 9 : 1, d. h. wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. —

Das Nämliche wird immer zum Vorscheine kommen, welches auch das Verhältnis der Geschwindigkeiten sein mag und es kommt wirklich ein sonderbarer Symbolismus zum Vorscheine zwischen Körpern, welche mit gegebenen Ge-

schwindigkeiten senkrecht in die Höhe geworfen werden und Körpern, welche mit denselben Geschwindigkeiten auf andere ruhende Körper stossen. Die Höhen nämlich, in denen die Anfangsgeschwindigkeiten des aufsteigenden Körpers um einen Grad abnehmen, stehen im nämlichen Verhältnisse der ungeraden Zahlen, in welchem die Massen der Körper sind, denen im Ruhezustande durch aufeinander folgende Stösse ein Geschwindigkeitsgrad mitgeteilt wird von einem Körper, welcher am Anfange ebensoviele Geschwindigkeitsgrade hatte, als der aufsteigende Körper am Anfange des Aufstieges.

Dieses Gesetz der Mitteilung der Bewegung lässt sich nicht unelegant aus dem Maſse der lebendigen Kräfte der Körper, welches hier bewiesen werden soll, ableiten, wenn man nur das eine Prinzip zulässt, dass die nämliche Grösse der Kraft, welche vor dem Stosse vorhanden war, beim Zusammenstosse erhalten bleibe.

Es seien zwei Kugeln A, B gegeben, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse seien a, b, nach demselben x, y; dann liefert jenes Prinzip die Gleichung.

$A a^2 + B b^2 = A x^2 + B y^2$, welche man als Fundamentalgleichung ansehen darf. Aus dieser Gleichung sind nur die Werte von x und y festzustellen. Man nehme an, die Bewegung der Kugeln finde in einem beweglichen Raum, etwa auf einem Schiffe statt, welches sich mit unendlich kleiner Geschwindigkeit $dv$ bewege etwa in derselben Richtung wie die Kugel A; dann wird es von einem festen Punkte etwa vom Ufer aus den Anschein haben, als ob die Kugel A, B sich vor dem Stosse mit den Geschwindigkeiten $a + dv$, $b + dv$, nach demselben mit $x + dv$, $y + dv$ bewegten; dann wird auch, wenn man diese an die Stelle von a, b, x, y in der Fundamentalgleichung setzt, die Gleichung gelten:

$A a^2 + 2 A a dv + A dv^2 + B b^2 + 2 B b dv + B dv^2 =$
$A x^2 + 2 A x dv + A dv^2 + B y^2 + 2 B y dv + B dv^2$; oder

$$A a^2 + 2 A a d v + B b^2 + 2 B b d v =$$
$$A x^2 + 2 A x d v + B y^2 + 2 B y d v$$

und mit Rücksicht auf obige Fundamentalgleichung

$$A a + B b = A x + B y \text{ oder}$$
$$A (a - x) = B (y - b);$$

die Fundamentalgleichung lässt sich aber auch in der Form schreiben:

$$A (a^2 - x^2) = B (b^2 - y^2), \text{ woraus folgt, dass}$$
$$a + x = b + y.$$

Die Gleichung $A a + B b = A x + B y$ sagt aus, dass der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Kugeln sich vor und nach dem Stosse mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt; denn $\frac{A a + B b}{A + B}$ ist die Geschwindigkeit desselben vor und $\frac{A x + B y}{A + B}$ diejenige nach dem Stosse.

Die Gleichung $a + x = b + y$ sagt aus, dass die resp. Geschwindigkeit beim Herankommen der Kugeln vor dem Stosse die nämliche ist wie die beim Zurückgehen derselben nach dem Stosse.

$$y = a - b + x; \; A a + B b = A x + B a - B b + B x$$
$$x = \frac{A a + 2 B b - B a}{A + B}; \; y = \frac{B b + 2 A a - A b}{A + B}.$$

Diese Geschwindigkeiten lassen sich aus dem einzigen angenommenen Prinzipe und aus dem Leibnitzschen Mafse der Kräfte ableiten.

Die oben abgeleiteten Gleichungen stellen dieselben Gesetze der Bewegung dar infolge eines Stosses, welche Wrennus, Wallisius, Huyghens, Mariott und andere für elastische Körper schon längst aufgestellt und zwar aus anderen Prinzipien abgeleitet haben. Also können sie aufs beste als Beweis für die Richtigkeit des Leibnitzschen Mafses gelten, wenn man den Schluss als Prämisse betrachtet und daraus dann schliesst, dass $A a^2 + B b^2 = A x^2 + B y^2$. — Wenn

nämlich m die Höhe bezeichnet, über welche der schwere Körper A herabfallen muss, um die Endgeschwindigkeit a zu erreichen, ebenso n die Höhe, durch welche B fallend die Geschwindigkeit b bekommt, ebenso p und q die Höhen, welche die nämlichen Kugeln A und B mit den Anfangsgeschwindigkeiten x, y bei natürlicher Verzögerung erreichen können, so ist wiederum $Am + Bn = Ap + Bq$, weil m, n, p, q den Grössen $a^2$, $b^2$, $x^2$, $y^2$, proportional sind. Daraus ergibt sich, dass die Grösse des Falles des gemeinsamen Schwerpunktes der Kugeln A und B dieselbe ist wie die des Aufstieges, vorausgesetzt dass die Bewegung der Kugeln nach dem Stosse sich senkrecht in die Höhe wendet. Die Grössen des Falles und Aufstieges des gemeinsamen Schwerpunktes sind eben die Maſse der Kräfte vor und nach dem Stosse; dies hat aber bereits Huyghens vermutet.

Kein Beweis scheint mir aber schlagender zu sein, sagt Hermann, als derjenige, welcher sich aus der Betrachtung ergibt, wie eine lebendige Kraft aus einer toten entstehen kann.

Ich denke mir einen schweren Körper C, der mit natürlicher Beschleunigung vertikal herabfällt und seine Bewegung aus der Ruhelage A beginnt. Am Anfange hat er also in A gar keine lebendige Kraft, weil er dort gar keine Bewegung hat und lebendige Kraft einem Körper nur durch Bewegung erteilt wird. Tote Kraft aber muss er haben, weil er ein schwerer Körper ist und sein bestimmtes Gewicht hat: diese tote Kraft lässt sich darstellen durch eine Linie Aa, senkrecht zur Linie seines Falles AH; sobald er aber nach E gekommen ist, hat er lebendige Kraft erlangt, weil er dort einen bestimmten Geschwindigkeitsgrad erreicht hat; aber wenn man unterdessen die Betrachtung der Geschwindigkeit fallen lässt, so ist zu untersuchen, woher, wie und welche lebendige Kraft gewonnen ist in E nach dem Falle über AE. Diese lebendige Kraft kann der Körper C nirgends anders her bekommen haben, als von seiner toten Kraft; denn wir

haben hier nichts anderes zu betrachten, als den Körper C, sein Gewicht und den Weg, über welchen er gefallen ist; dieser Weg aber verhält sich völlig passiv und trägt an sich nichts zur Bewegung bei; auch kann der Körper C, soferne er als ausgedehnt betrachtet wird und mit seiner bestimmten Masse ausgestattet ist, nicht die geringste Bewegung erzeugen; was er also an Bewegung und Kraft erlangt hat, wenn er nach E gefallen ist, kann nur von seiner toten Kraft, welche fortwährend auf ihn wirkt, während er von A nach E fällt, kommen; aber wie? — Die tote Kraft in A ist A a, in B ist sie B b = A a u. s. w., in E ist sie E e = A a, so dass der Ort aller toten Kräfte, welche auf C wirken, ein Rechteck ist. Die lebendige Kraft, welche in E erreicht ist, ist demnach nicht grösser und nicht kleiner als die Summe aller toten Kräfte, welche in dem Rechtecke enthalten sind und diese Summe wird durch das Rechteck selbst ausgedrückt. Deshalb verhält sich die lebendige Kraft in E zu der in H wie das Rechteck A e zum Rechtecke A h, oder da diese Rechtecke gleiche Basis haben, wie A E zu A H. Und das ist so, wenn die Schwere in jeder Entfernung von der Erde die nämliche ist.

Was wird aber zum Vorscheine kommen, wenn die Schwere in verschiedenen Entfernungen von der Erde verschieden ist? Nehmen wir an, der Körper C bewege sich in den Punkten des Weges A H, die toten Kräfte seien durch die Senkrechten A a, B b, H h einer gewissen Kurve a b . . . h ausgedrückt; dann verhalten sich die lebendigen Kräfte in E und H wie die Flächen A a e E und A a h H.

Wenn aber C in einer beliebigen Kurve A E H herabfällt und sein Gewicht in verschiedenen Entfernungen von der Erde durch a p, b q, d r, h t der Kurve p v t ausgedrückt wird, so wird auch dann noch die bewegliche Kraft in E zu der in H sich verhalten wie die Räume a p s e und a p t h (was bewiesen wird); dabei ist es gleichgiltig, ob die Rich-

tungen der Schwerkräfte parallel sind oder gegen ein Centrum konvergieren.

Daraus ergibt sich aber, dass die lebendigen Kräfte der Körper sich verhalten wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Was sich aber aus der Theorie der Schwere ableiten lässt, das scheint über alle Ausnahme erhaben.

Es soll nun zu einem anderen Teile der Frage der lebendigen Kräfte übergegangen werden. Mehrfach ist die Ansicht geltend gemacht worden, dass die Idee der lebendigen Kraft der Körper nicht die Idee der Schwere involviere, da nämlich jeder Körper, der mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausgestattet ist, seine bestimmte lebendige Kraft hat, mag er nun schwer sein, oder als völlig gewichtlos betrachtet werden, und dass aus diesem Grunde vergeblich auf die Theorie der Bewegung schwerer Körper zurückgegangen werde, um ein Mafs der lebendigen Kräfte zu finden. Zugegeben, dass Körper Körper sein können, obwohl sie keine Schwere besitzen und dass diese Körper trotzdem ihren Grad an lebendiger Kraft haben, was soll daraus folgen? Doch offenbar nichts anderes, als dass jene lebendigen Kräfte nicht die Schwerkräfte der Körper sind und nicht notwendig aus der Schwere entstehen, was niemals gesagt wurde; dass aber deshalb aus dem Falle der schweren Körper kein Mafs für die lebendigen Kräfte geschöpft werden könne, ergibt sich keineswegs daraus. Man denke nämlich einen gewichtslosen Körper A mit der Geschwindigkeit u, so wird dieser eine lebendige Kraft haben, welche von der Schwere völlig unabhängig ist; man denke sich ferner einen Körper B, welcher ihm an Masse völlig gleich, aber der Schwere unterworfen sei und der aus einer Höhe a fallend durch die Beschleunigung dieselbe Geschwindigkeit u erreiche, wie A, so werden diese beiden Körper die gleiche lebendige Kraft haben; aber die lebendige Kraft des B hängt von der Schwere

ab, die des A nicht; denn B hatte ursprünglich gar keine Kraft, sondern erlangte sie erst während des Falles durch die Schwere. Also kann der erwähnte Einwurf gegen unser Mafs der lebendigen Kräfte keinen beschränkenden Einfluss ausüben.

Hier ist auch der Streit zwischen Hermann und dem Engländer Samuel Clarke zu erwähnen; dieser erhob nämlich Einwürfe gegen das neue Mafs ähnlicher Art wie Conti und Papin. Zunächst bestreitet er dem Leibnitz die Meinung, dass dieselbe Grösse der Kraft in der Natur erhalten bleibe und doch nicht zugleich dieselbe Grösse der Bewegung, wo er mit dem Begriffe vis oder vis activa bei der gegenwärtigen Frage doch notwendig einen Stoss oder eine Impulsivkraft verstehen musste. Aber Clarke kann nirgends nachweisen, dass Leibnitz unter der aktiven Kraft einen Stoss verstanden hätte; er sucht im Gegenteile zu beweisen, dass die Bewegungsgrösse veränderlich, die Kraftgrösse aber die gleiche ist. Ferner macht er dem Leibnitz den Vorwurf, dass er die Impulsivkraft durch die Grösse der Mafse und des durchlaufenen Raumes messe, auf die Zeit aber gar keine Rücksicht nehme — ein Einwurf, den Leibnitz selbst, wie wir gesehen haben, schon früher widerlegt hatte. Und was das betrifft, dass Clarke sagt, Leibnitz befinde sich im Irrtum, wenn er meine, dass von den Cartesianern und den übrigen Philosophen und Mathematikern die Behauptung als richtig anerkannt werde: man brauche eine gleich grosse Kraft um einen Körper von 1 Pfd. auf 4 Ellen, wie um einen solchen von 4 Pfd. auf 1 Elle zu heben, weil die Zeiten dieser Aufstiege nicht gleich sind, so wäre, wenn es überhaupt ein Irrtum ist, nur ein solcher in einer Sache, die dem Ganzen nicht schaden kann, abgesehen davon, dass oben schon aus dem Cartesius selbst nachgewiesen wurde, dass er diese Behauptung ohne irgend welche Feststellung einer Zeitgleichheit zugegeben habe. So fallen alle Widersprüche des Gegners in sich zusammen, da sie nur Behauptungen ohne Beweise sind.

Wenn er ferner sagt, die Kräfte zweier Körper, welche in verschiedenen Entfernungen von der Achse einer Waage gegen deren Arme wirken, verhalten sich wie die Bogen, welche sie beschreiben, weil sie dieselben in gleichen Zeiten zurücklegen, so liegt nicht darin der Grund für diese Thatsache; denn dieses Verhältnis findet nicht deshalb statt, weil die Bogen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, sondern weil die Schwere eine kontinuirliche Wirkung ausübt und diese Körper in allen Punkten der Bogen mit der gleichen toten Kraft getrieben werden.

Ferner sagt er: Wenn zwei gleiche Kugeln in einer Horizontalebene von ungleichen Kräften getrieben werden, so werden sie in gleichen Zeiten Wege durchlaufen, welche den treibenden Kräften proportional sind. Oder wenn ungleiche Kugeln von gleichen Kräften getrieben werden, so werden sie in gleichen Zeiten Wege durchlaufen, welche ihren Massen proportional sind. Beide Behauptungen sind falsch. Es seien nämlich die gleichen Kugeln A in Ruhe; die eine werde durch die Kugel B mit der Geschwindigkeit b, die andere durch C mit der Geschwindigkeit c angetrieben; dann wird die erste die Geschwindigkeit $\frac{2Bb}{A+B}$ und die zweite $\frac{2Cc}{A+C}$ annehmen; also verhalten sich die Wege, welche in derselben Zeit zurückgelegt werden wie: $\frac{Bb}{A+B} : \frac{Cc}{A+C}$ und nicht wie die treibenden Kräfte. Wenn ferner die beiden ungleichen Kugeln A und B in Ruhe sind und es werden beide von den gleichen Kugeln C mit der Geschwindigkeit a in Bewegung gesetzt, dann erhält die Kugel A die Geschwindigkeit $\frac{2Ca}{A+C}$ und B die Geschwindigkeit $\frac{2Ca}{B+C}$ und diese Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Wege, welche beide Kugeln nach dem Stosse in gleichen Zeiten beschreiben; aber den Massen sind sie nicht proportional.

Damit fallen aber alle die Konsequenzen, welche Clarke daraus gegen Leibnitz gezogen hat, und man möchte sagen, es herrsche in allem folgenden eine fortwährende petitio principii, weil Clarke annimmt, die Kräfte verhalten sich wie die Bewegungsgrössen, was doch von Leibnitz widerlegt wird. Er sagt: „Wenn man die Zeit, in welcher der Körper seinen Weg durchläuft, in gleiche Teile geteilt denkt, so muss die Schwere dem Körper in gleichen Zeiten gleiche Kräfte, Geschwindigkeiten und Bewegungen mitteilen.“ Aber gerade diese Konsequenz ist hinsichtlich der Kraft falsch, so wahr es ist, dass in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten und gleiche Bewegungen erzeugt werden; denn man kann nicht sagen, dass die Zunahmen an Kräften sich einfach wie die Geschwindigkeiten verhalten, sondern vielmehr wie die Produkte aus den bereits erlangten Geschwindigkeiten und den Zuwüchsen derselben, d. h. wie die Zunahmen der Wege bei gleichen Massen der Körper.

Gegen Hermann selbst wendet sich Clarke, indem er sagt: „Hermann bleibt auf der Seite Leibnitzens stehen gegen diejenigen, welche behaupten, dass die Kräfte den Zeiten proportional seien oder den erlangten Geschwindigkeiten und sagt, diese falsche Ansicht stütze sich auf die falsche Behauptung, dass die in die Höhe geworfenen Körper in gleichen Zeiten von der Schwere die gleiche Zahl von Stössen erhalte. Das ist so viel, als wenn Hermann gesagt hätte, die Schwere sei nicht gleichmässig, und daher die Theorie des Galilei zu verwerfen. Ich glaube, Hermann meint, je schneller die aufsteigende Bewegung ist, desto mehr Stösse erhalten die Körper, weil sie mehr Partikelchen begegnen, welche die Schwere erzeugen. Und so wird das Gewicht der Körper grösser sein, wenn sie steigen, als wenn sie fallen.“

Darauf erwidert Hermann Folgendes: An mehreren Stellen der vorliegenden Arbeit ist geometrisch bewiesen: 1) Deshalb, weil die Schwere eine gleichmässige ist, verhalten

sich die Körperkräfte wie die Produkte aus den Massen in die durchlaufenen Wege; 2) wenn aber jene Kräfte sich verhielten wie die Produkte aus den Massen in die Zeiten, dann wäre die Schwere eine sprungweise; also wird durch die Hypothese des Gegners Galileis Theorie zerstört, bei der unsrigen bleibt sie aber intakt.

Es ist noch ein Einwurf zu widerlegen. „Wenn die Kraft", sagt Clarke, „welche der Körper im Fallen erlangt, sich verhält, wie der durchlaufene Weg, so möge man die Zeit in gleiche Teile zerlegen; wenn er dann im ersten Zeitteilchen die Kraft 1 hat, wird er im zweiten die Kraft 4, im dritten neun erlangen u. s. w.; wenn also angenommen wurde, dass die Wirkung der Schwere in der Mitte des ersten Zeitteilchens 1 sei, so wird sie in der Mitte des 2. 3. 4. Zeitteilchens 3, 5, 7 sein. Das ist aber ganz und gar falsch; denn die Wirkung der Schwere ist in der Mitte eines Zeitteilchens genau so gross wie am Anfange und Ende desselben." Wäre der Einwurf richtig, so könnte man auch den Schluss ziehen, dass die Schwerkräfte sich verhalten wie die ungeraden Zahlen. Hätte er gesagt, am Anfange des ersten Teilchens habe das Bewegliche keine lebendige Kraft, so hätte er nur die Wahrheit gesagt; aber dass dort keine Schwere vorhanden sei, kann niemals durch einen Vernunftschluss aus unserem Systeme gefolgert werden. — Zum Schlusse bemerkt Clarke Folgendes: Um den gegenwärtigen Streit deutlich abzuschneiden, mögen an zwei Fäden von gleicher Länge Kugeln so hängen, dass wenn sie aufgehängt bleiben und sich berühren, die Fäden parallel sind. Die eine von beiden Kugeln möge immer dieselbe bleiben und bei allen Experimenten in dieselbe Entfernung gebracht werden; die andere sei von beliebiger Grösse und möge in eine ihrem Gewichte reciprok proportionale Entfernung gebracht werden. Diese beiden Kugeln lasse man im selben Momente fallen, so dass sie an der untersten Stelle ihres Falles, an welcher

welcher sie aufgehängt waren, sich berühren können, bevor sie von einander weggetrieben werden. Die erste Kugel wird immer bis zur nämlichen Höhe zurückspringen; also ist die Kraft der anderen immer die nämliche, so oft ihre Geschwindigkeit ihrem Gewichte reciprok proportional ist; wenn also ihre Gewichte die nämlichen bleiben, so werden ihre Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sein.

Dieser letzte Einwurf wird von Hermann dadurch widerlegt, dass er beweist, dass die Annahme Clarkes, als träfen sich die Kugeln in allen Fällen im untersten Punkte der Bahn, falsch sei, weil in verschiedenen Fällen der gemeinsame Schwerpunkt beider Kugeln eine andere Lage einnehme.

XXI. Das Jahr 1725 bereicherte uns um eine weitere, eingehende Arbeit bezüglich der lebendigen Kräfte und ihres Mafses, indem G. B. Bülffinger in dem nämlichen Bande der mehrfach erwähnten Comment. Petropol. eine Untersuchung veröffentlichte de viribus corpori moto insitis et illorum mensura.

Die Meisten nehmen als Axiom an, dass die vollen Kräfte den vollen Effekten proportional seien; diese Effekte werden gemessen nach Leibnitz aus dem verzögerten Anstiege schwerer Körper, nach Joh. Bernoulli durch Federn, welche von einem bewegten Körper gespannt werden, nach Hermann aus den successiven Stössen des nämlichen elastischen Körpers auf verschiedene andere, nach Polenius und s'Gravesande mit Hilfe der Grübchen, welche schwere Körper beim Falle in weiche drücken.

Voraus gehen wieder Definitionen, die aber mit den oben aufgestellten der Art übereinstimmen, dass es überflüssig erscheint, dieselben hier anzuführen; bemerkenswert dürfte nur das sein, dass Bülffinger unterscheidet zwischen reiner und gemischter lebendiger Kraft; erstere ist ihm diejenige, welche bei der Bewegung nicht aufgezehrt wird, gemischt diejenige, welche während derselben vernichtet wird. Nennt

man die Wirkung einer Kraft A, ihre reine lebendige Kraft V und die Zeit der Wirkung T, so ist $A = V \cdot T$.

Die reinen lebendigen Kräfte, welche die nämlichen Massen bewegen, können durch irgend eine Funktion der Geschwindigkeiten, welche sie erzeugen, gemessen werden; damit soll aber nicht gesagt sein, dass Kräfte, Wirkungen und Geschwindigkeiten proportional seien.

Reine lebendige Kräfte, welche an dem nämlichen Körper so wirken, dass keine derselben die Richtung und Geschwindigkeit der anderen ändert, bringen eine Wirkung hervor, welche dem Aggregate der Wirkungen der einzelnen Kräfte gleich ist.

In jedem rechtwinkligen Parallelogramme ist die Wirkung und die lebendige Kraft längs der Diagonale gleich dem Aggregate der Wirkungen und lebendigen Kräfte längs der Seiten.

Bei einer gleichmässigen, aktuellen Bewegung verhalten sich die bewegenden Kräfte nicht wie die Wege, welche in der nämlichen Zeit beschrieben werden, also auch nicht wie die Geschwindigkeiten.

Bei gleichförmiger Bewegung verhalten sich die einfachen Kräfte wie die Quadrate der in denselben Zeiten durchlaufenen Wege, also auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Die Kräfte, welche längs der Seiten und der Diagonale eines Parallelogrammes wirken, können durch Funktionen dieser Linien gemessen werden; beim Rechtecke müssen sie aber so gemessen werden, dass das Aggregat der Seiten gleich der Diagonale wird und das ist nur möglich bei Quadraten.

Bei einem nicht rechtwinkligen Parallelogramme ist die Kraft längs der Diagonale nicht gleich dem Aggregate der Kräfte längs der Seiten.

Wenn ein Körper aus der Höhe A B so fällt, dass er im Falle über A C die Geschwindigkeit C F erlangt, dass er ferner, während er im zweiten Zeitteile den Weg C D durch-

läuft, eine neue Geschwindigkeit D G = C F erreicht, wenn er ferner, indem er den Weg D E zurücklegt, ausser der vorigen Geschwindigkeit C F + D G eine neue Geschwindigkeit N H erreicht, dann ist die während des Falles erlangte lebendige Kraft gleich dem Quadrate seiner Geschwindigkeit. Dann steht aber fest, dass Leibnitz, Hermann, Wolf ganz richtig als Mafs der lebendigen Kräfte die Höhen genommen haben, über welche schwere Körper fallen müssen, um eine gegebene Geschwindigkeit zu erlangen.

Hier ergibt sich ein sehr einfacher Weg, eine dem Leibnitz verursachte Schwierigkeit zu heben. Es meint nämlich ein sehr angesehener Mann — es ist wahrscheinlich Papin gemeint — zwei Ansichten Leibnitzens widerstritten sich selbst, da die eine die Schwere als gleichmässig voraussetze, die andere aber nicht; in gleichen Zeiten werden nämlich gleiche Geschwindigkeiten mitgeteilt und die Schwere sei deshalb gleichförmig und wirke gleichmässig; gleichwohl würden aber doch nicht gleiche Kräfte mitgeteilt; die Schwere sei also nicht gleichförmig und wirke nicht gleichmässig.

Die Lösung der Schwierigkeit lässt sich leicht aus den oben vorausgeschickten Sätzen finden. In den einzelnen Zeitteilen wird nämlich eine neue der vorigen gleiche Geschwindigkeit mitgeteilt, deshalb weil die Schwere gleichförmig ist und weil sie auf den bewegten Körper ebenso wirkt wie auf den ruhenden. Man könnte auf ähnliche Weise sagen, in gleichen Zeiten wird auch eine neue lebendige Kraft mitgeteilt, welche, wenn sie allein in dem Körper wäre, ohne die schon vorhandene, oder wenn sie von einem anderen Körper aufgenommen wird, jener schon vorhandenen gleich ist aus dem nämlichen Grunde. Mag sich nämlich auch der Körper bewegen, so kann er doch in Bezug auf den die Schwere verursachenden Grund als ruhend angesehen werden. Es ist also gleich hinsichtlich des neuen Impulses

der die Schwere erzeugenden Ursache, ob man denkt, sie wirke im zweiten Momente auf einen Körper, der vorher schon von einer Kraft angegriffen war oder ob man annimmt, nach dem ersten Stosse werde jener vernichtet und an seine Stelle ein gleicher in Ruhe befindlicher Körper gesetzt; in beiden Fällen wird die Schwere im zweiten Momente die nämliche Wirkung hervorbringen. Was also die Wirkung der Schwere selbst betrifft, so ist hier durchaus keine Aenderung angenommen. Der ganze Unterschied beruht also im zusammengesetzten Effekte. Die Geschwindigkeit nämlich, welche aus zweien zusammengesetzt ist, addiert sich und entspricht deshalb einer Summe von Geschwindigkeiten: aber die lebendige Kraft, welche aus zweien in demselben Körper zusammenfallenden lebendigen Kräften zusammengesetzt ist, macht nicht die Summe zweier einzelnen lebendigen Kräfte aus; denn eine Kraft, welche aus zwei Kräften besteht, die an dem nämlichen Körper in der nämlichen Richtung wirken, ist gleich dem Quadrate der Summe der Geschwindigkeiten, welche die einzelnen Kräfte für sich erzeugen. Und deshalb entspricht sie nicht der Zeit, sondern den Quadraten der Zeiten oder Geschwindigkeiten oder dem Wege beim Falle. Hier ist also kein Widerspruch; die Schwere ist einförmig in der Erzeugung einer neuen Geschwindigkeit und in der Erzeugung einer neuen Kraft; der Unterschied zwischen einer zusammengesetzten Geschwindigkeit und einer zusammengesetzten Kraft hängt von etwas Anderem ab als von der in gleichen Zeiten verschiedenen Wirkung der Schwere.

Zur Klarmachung des Wesens der lebendigen Kräfte fügt Bülffinger hier Folgendes an: Die Schwere, jene tote, aber in Bewegung setzende Kraft, ist nicht proportional dem Wege beim Falle; aber die lebendige Kraft, welche durch eine unendlich oftmalige Wiederholung der Schwere entsteht, ist dem Wege proportional; durch sie fängt zwar der Körper nicht an zu fallen; aber er setzt den Fall dennoch fort und

zwar durch sie nicht weniger als durch die neuen Stösse der Schwere; solange sie auf ähnliche Weise beim Aufsteigen dauert, solange steigt der Körper; wenn sie aufhört, steigt er nicht mehr; er würde also hängen bleiben, wenn nicht etwas Anderes dazu käme; aber jene tote Kraft, welche die vorige lebendige Kraft in dem Körper allmählich vernichtet, verleiht ihm jetzt durch fortdauernde Stösse eine neue, der vorigen in ihrer Richtung entgegengesetzte lebendige Kraft. —

Im zweiten Teile dieser Arbeit spricht Bülffinger von den Kräften, welche einem bewegten Körper mitgeteilt werden und macht gleich eingangs die historisch merkwürdige Mitteilung, Cartesius selbst habe die bewegende Kraft durch das Produkt aus der Masse in den Weg gemessen wissen wollen (litt. Tom. I. epist. 73) und dem Mafse der Kräfte durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit widersprochen (Tom. I. ep. 74, Tom. II. ep. 92 u. 109). Seine Nachfolger aber hätten, da sie allein an die Statik dachten, beide Schätzungen zugelassen.

Ganz richtig scheint diese Notiz Bülffingers übrigens nicht zu sein; die Wahrheit ist nämlich die, dass sich Cartesius selbst nicht klar war hinsichtlich des Mafses der Kräfte; denn in princ. phil. T. II. p. 53 misst er ganz deutlich die Kraft eines Körpers durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Später scheint er seine Ansicht aber geändert zu haben; wenigstens findet sich in einem Briefe an Mersennus (T. II. litt. V) eine Stelle, aus welcher hervorgeht, dass er daran dachte, eine Kraft durch das Produkt aus Masse und Weg zu messen; denn es heisst dort, dass genau dieselbe Kraft erforderlich sei, einen schweren Körper zu einer gegebenen Höhe zu heben, welche nötig sei, einen weniger schweren Körper zu einer um so grösseren oder einen schwereren Körper zu einer um so kleineren Höhe zu heben. Ja, nachdem Mersennus ihm mitgeteilt hatte, dass Einigen dieses Prinzip unannehmbar erscheine, schreibt er

sogar zurück: „Man muss fortwährend im Auge behalten, dass ich von der Kraft spreche, welche nötig ist, einen Stein auf eine Höhe zu heben und nicht von derjenigen, welche man zur Unterstützung eines Punktes braucht; diese zwei Kräfte unterscheiden sich von einander wie eine Fläche und eine Linie.“ Mehrere hätten eben die Gewohnheit, die Betrachtung des Raumes mit der der Zeit oder der Geschwindigkeit zu vermengen u. s. w. Cartesius stellt also hier eine Ansicht auf, die der in den Prinzipien angenommenen geradezu widerspricht. Freilich suchten seine Anhänger diesen offenbaren Widerspruch damit zu erklären, dass sie sagten, der Meister spreche hier nur von gleichzeitigen Bewegungen und weil sie sahen, dass beim Hebel und allen darauf bezüglichen Maschinen die Kraft richtig durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit gemessen worden, nahmen sie fast Alle ohne Ausnahme dieses Produkt überhaupt als Mafs der Kräfte an.

Man kann also nicht sagen, wie Bülffinger, dass Cartesius das später, allerdings fälschlich, nach ihm benannte Mafs verworfen habe; er selbst war unentschieden; erst seine Anhänger haben das sogenannte cartesianische Mafs festgesetzt.

Alles Folgende, was Bülffinger in diesem zweiten Teile erwähnt, bezieht sich auf die Geschichte dieses Streites und kann also hier, weil schon eingehend erwähnt, übergangen werden. Im folgenden Teile nun zeigt Bülffinger seine eigene Ansicht.

Leibnitz sagt in seiner Theodicee § 347: „Aus der Bewegung auf 2 Seiten eines Dreiecks setzt sich die Bewegung in der Diagonale zusammen; aber daraus folgt nicht, dass eine auf der Hypotenuse bewegte Kugel den Effekt zweier ihr gleichen Kugeln hervorbringe, welche sich auf den Seiten bewegen. Und doch findet dies in der Natur statt.“ Da gewöhnlich die Effekte ihren Kräften proportional gesetzt werden, so war es deshalb auch leicht, den Schluss

zu ziehen, dass in dem von Leibnitz erwähnten Falle, wo die Effekte verschiedener Kräfte die gleichen sind, auch die Kräfte gleich sein müssten. Das ist aber nur möglich, wenn die Kräfte gemessen werden durch die Quadrate der Linien, welche die Geschwindigkeiten der Kräfte ausdrücken. Wir halten deshalb an der Schätzung der Kräfte fest, welche mit der Ansicht Leibnitzens übereinstimmt.

Eine genauere Untersuchung ergibt Folgendes:

1. Es ist nicht erlaubt, von jedem Effekte auf die Kräfte überzugehen; denn bisweilen bringen Kräfte dieselbe Wirkung hervor, wiewohl sie nicht gleich sind. 2. Zuweilen lassen sich Seitenbewegungen in eine Diagonalbewegung zusammensetzen; aber der Effekt einer in einer Diagonale bewegten Kugel ist nicht derselbe wie der zweier Kugeln, die auf den Seiten bewegt werden. 3. Die Anstrengungen, welche von toten Kräften herrühren, werden nicht anders zusammengesetzt wie die von lebendigen Kräften herrührenden Bewegungen; und doch haben lebendige und tote Kräfte nicht dasselbe Maſs. 4. Beim stumpfwinkligen Parallelogramme kann man zweifeln, ob die zusammengesetzte Kraft dem Quadrate der Diagonale entspricht oder den Quadraten der gleichzeitig genommenen Seiten. 5. Man kann also ganz richtig fragen, wie dieses Maſs übereinstimmt mit der gewöhnlichen Theorie des Stosses.

Es stosse eine Kugel A in der Richtung A D auf eine in D befindliche Kugel, dann wird A in Ruhe kommen und D in der Richtung D a = D A bewegt werden. Bewegen sich aber auf den Seiten des Parallelogrammes B D und C D zwei Kugeln mit den Kräften M und N gegen den nämlichen Punkt D, so wird wiederum D in der Richtung D a = D A bewegt werden. Es sind also im Körper A nun zwei Kräfte vorhanden, welche dieselbe Wirkung hervorbringen, wie vorher die eine. Sind die Kräfte deshalb einander gleich? — Die Mechaniker sagen, sie seien nicht

gleich. Es gibt also eine Äquipollenz von Kräften, wo keine Gleichheit derselben vorhanden ist. Dies ergibt sich auch aus der Betrachtung eines Hebels, welcher von verschiedenen Kräften in verschiedenen Entfernungen in Bewegung gesetzt wird; es ergibt sich aus der Zusammensetzung der Anstrengungen bei toten Kräften, wo die Seitenkräfte niemals der Diagonalkraft gleich sind, ausser wenn sie in derselben Richtung wirken; es ergibt sich aus Beispielen an sämtlichen Maschinen. Aber eine Gleichheit ergibt sich bei der Äquipollenz dennoch, wenn auch nicht der Kräfte, so doch ihrer Wirkungen. Man muss also auf die Wirkungen der Kräfte Rücksicht nehmen und zwar erstens, wie sich einzelne reine Kräfte zu ihren Wirkungen verhalten, und dann wie sich zusammengesetzte Kräfte bei zusammengesetzten Bewegungen in ihrer Wirkung gegenseitig verhalten. Da nun einzelne reine Kräfte, welche auf einen Körper so wirken, dass eine jede derselben seine Teilchen gleich schnell bewegt, gleiche Wirkung hervorbringen, so entsteht bei Gleichheit der Massen kein Unterschied in der Anwendung dieser Kräfte, ausser wenn auf die Verschiedenheit der Zeit Rücksicht genommen wird. Die Wirkungen dieser Kräfte sind deshalb nach ihrer Intensität und nach der Zeit zu messen. Bei gleicher Zeit verhalten sich demnach die Wirkungen reiner Kräfte wie diese selbst. Deshalb müssen auch bei zusammengesetzten Bewegungen, wo die Zeiten immer gleich sind, wenn nicht aus der Zusammensetzung selbst sich ein neuer Unterschied ergibt, die äquipollenten Kräfte immer gleich sein.

Es kann sich aber ein Grund zum Unterschiede ergeben aus der Zusammensetzung der Kräfte. Wenn nämlich zwei Kräfte, welche an einem Körper wirken, einzeln so wirken, dass der Effekt keiner von beiden weder vermehrt noch vermindert wird, dann kann man sie wie reine Kräfte behandeln; wenn aber der Effekt einer Kraft durch das Zusammentreffen mit der anderen vermehrt oder vermindert wird, so muss auf

diesen Unterschied bei der Beurteilung der zusammengesetzten Bewegung achtgegeben werden.

Zwei gleiche Seitenkräfte bringen immer dieselbe Wirkung hervor wie die Diagonalkraft; aus der Gleichheit derselben ergibt sich aber eine Äquipollenz der Kräfte und falls dieselben aufeinander senkrecht stehen, sogar eine Gleichheit derselben: denn in diesem Falle wirken die Seitenkräfte, wie Bülffinger zeigt, wie einfache Kräfte und die Wirkung solcher Kräfte verhalten sich ja bei Gleichzeitigkeit wie die Kräfte selbst. Daraus ergibt sich aber, dass die Kräfte gemessen werden müssen wie die Quadrate der Linien.

Was die Bewegungen betrifft, so werden dieselben längs A B und A C entweder so betrachtet, wie wenn sie in diesen Linien selbst vor sich gingen oder in ihrer Ebene.

Im ersteren Falle müsste allerdings die eine durch die andere gestört werden, falls ∢ B A C ein rechter ist. Und in diesem Sinne lässt sich die Summe der Seitenbewegungen nicht festhalten, ausser wenn der Winkel ein sehr spitzer ist. Fasst man die Bewegungen aber als in der Ebene A B C D vor sich gehend auf, dann ist es völlig richtig, dass bei einem rechten Winkel die eine Bewegung die andere nicht stört. Also muss auch bei zusammengesetzter Bewegung längs A D das Aggregat der Bewegungen längs A B und A C vorhanden sein; nur muss in diesem Falle die Bewegung längs N D als zweidimensional aufgefasst werden. Dabei ist es nicht notwendig, dass N D gleich dem Aggregate von A B und A C sei, sondern sie muss denselben nur genügen ohne Vergrösserung oder Verkleinerung der einen oder anderen.

Im nächsten Teile behandelte Bülffinger die schiefen Winkel.

Die aus Seitenbewegungen entstehende Bewegung setzt sich auch dann nach der Diagonale zusammen, wenn der Winkel kein rechter ist; aber die Seitenkräfte werden in diesem Falle dem Körper nicht mehr ganz mitgeteilt. Wenn

nämlich der Körper von zwei Kräften zugleich getrieben wird, so entgeht er nämlich vermöge der Kraft und der Bewegung, welche er von dem einen Körper erhält, dem Stosse des anderen, soweit nämlich die Richtung des einen mit der des anderen zusammenfällt. Anders ist es, wenn zwei Kräfte als dem Körper eingepflanzt aufgefasst werden; dann entgeht nämlich derselbe durch den Stoss der einen nicht auch dem der anderen.

Betrachtet man die eine Richtung etwa A B als eine einfache und die andere A C als zusammengesetzt aus zweien, welche mit einander einen rechten Winkel bilden A E und E C, dann ist A C nach dem Vorigen gleich und gleich wirkend mit dem Aggregate der nach A E und E C wirkenden Kräfte und die Kraft A E greift A B nicht an. Dann hat man die eine Kraft M in der Richtung A B und die andere Q in E C oder B F. Aus M und Q entsteht aber A F und demnach ist die gesamte Kraft gleich einer einfachen

$$R = AB^2 + BF^2 + 2\,AB \cdot BF = M^2 + Q^2 + 2 \cdot M \cdot Q.$$

Um die Geschwindigkeit, welche aus den beiden Kräften M und Q entsteht, zu finden, möge der Körper A in der Linie H B F von M mit der Geschwindigkeit A B getrieben werden; ein anderer H mit der Kraft R und der Geschwindigkeit $HC = AB + BF$ folge ihm; dann wird H auf A stossen und ihm die Geschwindigkeit B F mitteilen, so dass sich nach dem Stosse A mit der Geschwindigkeit $AB + BF = HC$ und H mit $HC - BF = AB$ bewegt. Dieser Fall ist identisch mit dem unsrigen.

Die allgemeine Lösung der Aufgabe besteht in der Idee, dass beide Kräfte als in dem nämlichen Körper aufgefasst werden. Man kann dies noch auf andere Art zeigen: Denkt man sich zwei Körper A in A und H in H, ihren gemeinsamen Schwerpunkt in R, dann kommt nach einer gewissen Zeit A nach B, H nach C und der Schwerpunkt nach S. Im Schwerpunkte sei ein Körper mit der Masse $A + H = 2\,A$.

Bewegt man die Körper einzeln, so ist die Kraft im einen $A \cdot \overline{AB}^2$, im anderen $H \cdot \overline{HC}^2$, in dem im Schwerpunkte befindlichen Körper aber $(A + H)\ \overline{RS}^2 = \frac{1}{4}(A + H)\ (AB + HC)^2 = \frac{1}{2} A\ (AB + HC)^2$. Die Kräfte sind also nicht gleich. Daraus ergibt sich, dass ein Unterschied besteht, ob man zwei Kräfte als in einem Körper oder in zweien existierend betrachtet, und dass nicht jede zusammengesetzte Kraft zugleich ein Aggregat von komponierenden Kräften ist. —

Im nächsten Teile spricht Bülffinger vom Maſse der lebendigen Kräfte. Um ein Maſs aufstellen zu können, müsse man vor allem die Genesis der zu untersuchenden Sache kennen.

Man denke sich zwei Körper von gleicher Masse, den einen in Ruhe, den anderen in Bewegung; letzterer stosse auf ersteren, dann tauschen sie bekanntlich ihre Geschwindigkeiten aus, die lebendige Kraft fliesst gleichsam von dem einen auf den anderen über. Es handelt sich nun darum, was dabei geschehen ist, dass man daraus ein Maſs der lebendigen Kraft ableiten kann. Dabei ist zu merken:

Die Natur macht keine Sprünge, also kann kein natürlicher, in Ruhe befindlicher Körper eine endliche Geschwindigkeit erlangen ausser durch Beschleunigung; zu dieser Idee passt die Natur eines elastischen Körpers; im ersten Momente des Zusammenstosses wird sich also ein Körper nicht mit der vollen Geschwindigkeit bewegen; also wird auch nicht durch eine momentane Erschütterung die bewegende Kraft in dem einen Körper verzehrt und in dem anderen erzeugt, sondern es werden die elementaren Stösse dazu verwendet, dass eine successive Beschleunigung des ruhenden Körpers entstehe; diese werden aber dazu verwendet, dass eine Erschütterung entstehe mit einer Geschwindigkeit, die grösser ist als die eigene bereits erlangte Geschwindigkeit des Körpers,

der in Ruhe war. Es kann nämlich dem Körper A, welcher sich mit der Geschwindigkeit AS bewegt, durch den folgenden Körper H keine grössere Geschwindigkeit mitgeteilt werden, wenn sich nicht dieser Körper selbst mit der Geschwindigkeit AS + SV bewegt. Also müssen, wenn der Körper A, welcher in Ruhe war, durch den Stoss des Körpers H eine Geschwindigkeit AB erreichen soll, so viele elementare Stösse geschehen, als Elemente SD in AB enthalten sind. Es müssen also die Geschwindigkeiten der einzelnen Stösse den Linien AS, SV ... gleich sein. Die Elemente ST, XY, ... müssen die elementaren Stösse ausdrücken, welche dem Körper A, der sich bereits mit der Geschwindigkeit AS bewegt, zur Erzeugung einer neuen Geschwindigkeit SV von Seiten des H mitgeteilt werden müssen. Der Raum des Winkels ABC muss die Summe aller elementaren Stösse ausdrücken. Also muss diese Summe dem Quadrate der Geschwindigkeit AB proportional sein.

Es muss aber diese Summe von elementaren Stössen proportional sein der lebendigen Kraft, welche in H erloschen ist und der, welche in A entstand, da sie ja alle aus der lebendigen Kraft von H hervorgehen, bevor diese selbst erlischt und alle von A aufgenommen werden, bevor die Geschwindigkeit AB entsteht. Also kann das Mafs der lebendigen Kraft nicht grösser sein als die Summe dieser Stösse und nicht kleiner. Demnach muss die lebendige Kraft dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein.

Nachdem Bülffinger eine neue Theorie des Stosses elastischer Körper gezeigt hat — die hier als unserer Aufgabe ferner liegend übergangen werden dürfte — fährt er fort:

„Aus der gegenwärtigen Klarstellung ergibt sich der Unterschied zwischen toten Kräften, Teilen der lebendigen Kraft und zwischen der lebendigen Kraft selbst. Ich erkläre die tote Kraft, d. h. die bloss wirken wollende Kraft durch eine Dimension und dies kann bei einem natürlichen schweren

Körper durch die Masse geschehen. Das Moment dieser toten Kraft oder was dasselbe ist, die Wirkung der wirken wollenden Kraft stelle ich durch zwei Dimensionen dar, etwa durch das Produkt aus der Masse in die Geschwindigkeit der Anstrengung. Wenn aus dieser Anstrengung keine Bewegung hervorgeht, bleibt die ganze Sache in diesen Grenzen und diese Anstrengungen werden durch entgegengesetzte, gleiche aufgehoben. Die Elemente der lebendigen Kraft haben aber eine Arbeit von drei Dimensionen. Ausser dem Maſse der Wirkung und des Momentes muss nämlich hier auch auf die Geschwindigkeit der Bewegung Rücksicht genommen werden. Deshalb wird das Element einer lebendigen Kraft durch ein elementares Prisma dargestellt werden, dessen eine Dimension die wirken wollende, tote Kraft ausmacht, die andere die Anstrengung der Geschwindigkeit und die dritte die Dauer und gleichsam die Bewegung dieses elementaren Momentes, das durch entgegenstehende Anstrengungen nicht gehindert ist. Die lebendige Kraft wird dann ausgedrückt durch das Integral jener elementaren Prismen. Daraus folgt, dass die lebendige Kraft weder durch die Summe toter Kräfte dargestellt noch durch Teilung in tote Kräfte zerlegt werden kann, so wenig als dies von Linien und Flächen gilt.

Das Leibnitzsche Maſs widerspricht also keineswegs dem Maſse der toten Kräfte; es folgt vielmehr das eine aus dem anderen.

Ich glaubte, hier diese Stelle wortwörtlich mitteilen zu sollen, weil — mag auch heutzutage kein Mensch mehr von toten Kräften sprechen — in der Zeit des Kampfes um das Maſs der lebendigen Kräfte, wie schon zu wiederholten Malen zu sehen war, auch die toten Kräfte eine grosse Rolle spielten und der Begriff derselben wohl aus keiner Erklärung deutlicher zu erkennen ist, denn aus der obigen. —

Im letzten Teile der Arbeit sucht nun Bülffinger noch die Gründe anzugeben, warum ungleiche lebendige Kräfte in

entgegengesetzter Richtung wirkend, Gleichgewicht erzeugen können. Wenn zwei Körper A und B mit Geschwindigkeiten, welche ihren Massen reciprok sind, gegen sich oder auf einen zwischenliegenden Körper C stossen, so sind ihre Stösse isochron. Daraus folgt, dass, je grösser die Geschwindigkeit des einen ist, desto rascher die Stösse erfolgen, dass also, falls kein Hindernis einträte, die Elemente grösser würden als die des langsameren Körpers. Sollten aber jene Stösse gehindert werden, so folgt, dass die einzelnen Stösse aufgehoben werden durch gleiche entgegengesetzte, und dass deshalb Gleichgewicht eintreten muss. Das scheint zwar anfangs paradox, enthält aber keineswegs etwas Unsinniges in sich. Wenn MC = mc, wird Gleichgewicht eintreten, da keine dritte Dimension entstehen kann. Auch wird durch derartige Stösse in einem zwischenliegenden Körper C keine lebendige Kraft entstehen. Nimmt man aber an, A stosse auf einen gleichen ruhenden Körper D, und B auf einen ihm gleichen E, dann wird der Trieb der Körper A und B nicht gehindert, sondern es entsteht in D und E lebendige Kraft. Das Mafs dieser Kraft hängt aber nicht bloss ab von der Grösse des Stosses, sondern auch vom Verhältnisse der Bewegungen. Wenn also auch MC = mc, so kann doch die entstehende Kraft ungleich sein, wenn die dritte Dimension verschieden ist, d. h. die Änderung der Geschwindigkeit, mit welcher jene Stösse erfolgen. Daraus ergibt sich aber einerseits, warum die lebendige Kraft in D und E sich durch $MC^2$, $mc^2$ ausdrücken lässt wie die von A und B und anderseits, warum jene Kräfte sich Gleichgewicht halten.

Die Anhänger Leibnitzens behaupten, dass die gesamte Kraft ihrem Effekte proportional sei. Wenn MC = mc, so sehen wir, dass der Effekt des A darin besteht, die Kraft von B zu vernichten und umgekehrt. Es hat deshalb den Anschein, als ob für den Effekt der Kraft in A der der Kraft in B gesetzt werden könne, dass also wegen der Gleichheit

der Effekte auch die Kräfte gleich seien. Beim gewöhnlichen Mafse ergibt sich dies wegen $MC = mc$ ohne weiteres. Wie aber beim Leibnitz'schen, wo $MC^2 : mc^2 = m : M$ ? Die Kräfte des B von denen des A vernichtet, können nicht für einen den Kräften des A proportionalen Effekt angesehen werden, wenn nicht die Massen gleich sind. Denn da erstlich Kräfte nach dem vollen Effekte gemessen werden, so gibt der Effekt die Widerstände an, durch welche die Kraft eines bewegten Körpers aufgezehrt wird; jene Widerstände müssen also betrachtet werden hinsichtlich des Körpers, der sie erleidet und deshalb muss sowohl der Trieb der Kraft als der Widerstand, welcher ihn vernichtet, auf die nämliche Masse angewendet werden. Wenn man das nicht thut, hat man überhaupt kein Mafs für lebendige Kräfte. Setzt man nämlich x für m und y für c, so wird Gleichgewicht sein so oft $MC = xy = mc$; aber $xy^2$ kann dessen ungeachtet auf unzählige Arten von $mc^2$ verschieden sein, so dass nicht $MC^2 : xy^2 = m : M$ ausser wenn $x = m$ ist. Also kann die Kraft von B, welche Gleichgewicht mit $A (= xy^2)$ bewirkt, nicht als Mafs der Kraft in A genommen werden.

Man muss also berücksichtigen: Da Kräfte geschätzt werden nach den Widerständen, durch welche sie aufgezehrt werden, so lassen sich jene Widerstände auffassen als von dieser Masse aufgenommen oder von einer gleichen Masse, nicht aber von einer anderen ungleichen. So geschieht es bei schweren Körpern, welche mit verzögerter Bewegung aufsteigen, so auch beim Stosse. Und es ergibt sich von Neuem, von welcher Wichtigkeit die Verschiedenheit der Masse ist, wenn es sich um Kräfte und deren Vergleichung handelt.

XXII. Einen weiteren Beweis für die Richtigkeit des Leibnitzschen Mafses finden wir in einer Abhandlung Daniel Bernoullis: Examen princ. mech., welche ebenfalls im ersten Bande der Comment. Petrop. enthalten ist. Er sucht dort

zu zeigen, dass die Elemente der lebendigen Kraft auszudrücken seien durch $v\,dv$, so dass also $p\,dt = v\,dv$ oder $v^2 = 2\,pt$, dass also die lebendige Kraft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit sei. Als Mafs der lebendigen Kraft nimmt er, wie sein Vater (siehe pag. 67) die Zahl von Federn, welche ein Körper schliessen kann, bevor er seine Bewegung verliert. Nach dieser Definition ist also zu beweisen, dass ein Körper mit doppelter Geschwindigkeit vier gleiche und gleich gelegene Federn zu demselben Grade spannen kann, zu welchem der nämliche Körper mit der einfachen Geschwindigkeit eine Feder spannt. Er meint, sein Vater habe das zwar schon bewiesen, aber durch eine Zusammensetzung, welche einige Zweifel habe erregen können; er aber werde es direkt zeigen und zwar aus dem bekannten Prinzipe Galileis.

Vorausgesetzt ist eine Feder, welche gegen den festen Punkt L zusammengedrückt werden kann; die Kurve BF sei der Art, dass, während die Abscisse LH die Länge der zusammengedrückten Feder angibt, die Ordinate HD die hiezu verwandte Kraft bezeichnet. Wenn es also 4 solche Federn gibt, so wird die Ordinate doch einmal so gross sein als die entsprechende an der vorigen Kurve. Nun wird im ersten Falle die Feder bis zur Länge LJ zusammengedrückt und dann die Kugel A vorgeschnellt; es handelt sich dann darum, welche Geschwindigkeit A erreichen werde, wenn die Feder die Lage LH angenommen hat. Ist $LH = x$ $HD = p$, die Geschwindigkeit der Kugel v, die Zeit t, so wird $dv = p\,dt = p\,\frac{dx}{v}$; $v\,dv = p\,dx$; $v^2 = 2\int p\,dx$. Im zweiten Falle erhält man dasselbe; nur ist statt p zu setzen $4\,p$; also $v = \sqrt{2\int p\,dx}$; daraus ergibt sich, dass die Geschwindigkeiten entsprechender Punkte sich verhalten wie

1:2 und wenn die Bewegung reciprok ist, so wird eine Kugel A die Feder bis nach J spannen und eine gleiche Kugel a mit doppelter Geschwindigkeit vier Federn bis nach i. Das muss über allen Zweifel erhaben sein und wer die lebendige Kraft in diesem Sinne leugnet, ist entweder kein Geometer oder er bekämpft die Definition. Aber Eines ist dabei zu beobachten, nämlich dass die Summe aller momentanen Drucke, welche der Körper ausgehalten hat, während er die vier Federn spannte, nicht die vierfache, sondern nur die doppelte war, weil man die Summe aller momentanen Drucke nicht bloss aus den Drucken selbst, sondern auch aus den Zeiten, in welchen sie einzeln angewandt wurden, d. h. nach $\int p\,d\,t$ schätzen muss; denn 1 Pfd. leistet in 2 Minuten so viel als 2 Pfd. in 1 Minute oder die Summe aller momentanen Drucke ist im ersten Falle so gross wie im zweiten; es ist aber $p\,d\,t = d\,v$; also $\int p\,d\,t = v$.

Wenn also Jemand die einem bewegten Körper mitgeteilte Kraft definierte aus der Summe aller momentanen Drucke, welche der Körper direkt aushalten kann, bevor er seine Bewegung verliert, so würde er sie mit Recht den einzelnen Geschwindigkeiten proportional setzen. Es ist auch zu bemerken, dass jene Summen von Drucken immer die nämlichen bleiben für die nämlichen Körper bei den nämlichen Anfangsgeschwindigkeiten, wenn bloss die Drucke genommen werden, welche der Bewegung des Körpers direkt entgegengesetzt sind. Es habe nämlich ein Körper eine Anfangsgeschwindigkeit, in Folge deren er die vertikale Höhe DN emporsteigen kann, dann wird er mit derselben Geschwindigkeit auch über die Kurve DO emporsteigen können; in beiden Fällen hat aber der Körper dieselbe Summe ihm direkt entgegengesetzter Drucke auszuhalten; zieht man nämlich unendlich nahe zwei Horizontalen und zu beiden die

Vertikalen, so wird die Geschwindigkeit in B dieselbe sein, wie in M; ist aber der Druck in M p, so ist er in B $\frac{AB}{BC} \cdot p$; braucht er zum Aufstiege über MN die Zeit dt, so braucht er über BC $\cdot \frac{BC}{BA}$ dt; das Produkt ist aber in beiden Fällen pdt. So ist auch die Summe aller Drucke in beiden Fällen dieselbe. Und diese Theorie lässt sich leicht in die Leibnitzsche umändern, nach welcher der nämliche Körper mit der nämlichen Anfangsgeschwindigkeit die nämliche Zahl gleicher Federn spannt, bevor er seine Bewegung aufgibt. — Wir werden später sehen, was von diesem Beweise zu halten ist.

XXIII. Im Jahre 1726 erschien in den Phil. Transactions Nr. 395 eine Abhandlung von John Eames unter dem Titel A Remark upon the New Opinion relating to the Forces of moving Bodies in the case of the Collision of Non-Elastic Bodies, welche auf experimentellem Wege die Frage zu entscheiden sucht. Die Experimente, welche mit Körpern, die man auf eine weiche Materie fallen liess, angestellt wurden, seien etwas kompliziert und nicht passend für diesen Fall; das Bequeme bei diesen Experimenten liege darin, dass der Widerstand untersucht werde, welchen bewegte Körper erleiden, statt der Kräfte, mit welcher sich diese bewegen.

John Eames hofft nun auf andere Art die Richtigkeit der alten Lehre zu erweisen.

A und B seien zwei unelastische Körper gleicher Masse; B sei in Ruhe, A aber bewege sich mit der Geschwindigkeit 8. Dann werde nach allgemein angenommenen Gesetzen die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stosse 4, also die Kraft, welche so bei dem Stosse B mitgeteilt wurde, 16 sein. B bewege sich nun mit der Geschwindigkeit 2 vorwärts und A mit der Geschwindigkeit 10. Die resp. Geschwindigkeit

sei also wie vorher 8; der Stoss sei also der nämliche wie vorher; aber die Geschwindigkeit in B nach demselben sei 6. Wende man also die neue Lehre an, so verhalte sich die Kraft des B vor dem Stosse zu seiner Kraft nach demselben wie 4:36; die beim Stosse mitgeteilte Kraft sei also 32. Also brächte der gleiche Stoss in beiden Fällen ungleiche Effekte hervor, und diese Untersuchung zeige immer andere Resultate, je nachdem man beiden Körpern andere Geschwindigkeiten zuteile. Die Zusammendrückung der Teilchen sei hiebei allerdings ausser acht gelassen, aber auch nur von geringem Einflusse, da sie ja in allen Fällen dieselbe sei.

Auf diesen Einwurf hätte nun allerdings ein Anhänger Leibnitzens sagen können — ich habe nämlich keine Erwiderung auf obige Bemerkungen gefunden — das sei gerade ein Beweis für die Unrichtigkeit des alten Maſses; denn die Kraft, welche ein Körper mit der Geschwindigkeit 10 auf einen solchen mit der Schnelligkeit 2 überträgt, müsse unbedingt grösser sein als die, welche ein Körper mit der Geschwindigkeit 8 einem solchen mit der Schnelligkeit 0 mitteile; nach seiner (des Leibnitzianers) Anschauung verhalten sich demnach die Kräfte wie $10^2:8^2$. Wir können also daraus so viel entnehmen, dass die Eamessche Lösung der Frage keine Lösung, sondern lediglich eine Umschreibung derselben ist, — abgesehen davon, dass sie eigentlich nur eine Anwendung Musschenbroekscher Theorien ist.

Eine andere Arbeit desselben Gelehrten im selben Bande der Phil. Transact. gibt Bemerkungen zu einem „vermeintlichen“ Beweise für das neue Maſs; es ist kein anderer gemeint als der Seite 71 mitgeteilte Beweis Bernoullis. Derselbe sei ganz und gar auf die allgemein angenommene Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte begründet und nicht auf entscheidende Experimente. Alles was mit dieser Theorie bewiesen werde, sei, dass ein bewegter Körper mit 2 Grad Geschwindigkeit 4, mit 3 Grad 9 gleichartige Federn zu

schliessen vermöge, indem jede einen Grad Geschwindigkeit in senkrechter Richtung zerstöre, bevor die Kraft völlig erschöpft sei und ihm die Mühe erspare, seine Bewegungsrichtung plötzlich zu ändern.

Lasse man aber die nämliche Kugel sich in derselben Richtung bewegen, so könne man bei einer ganz geringen Änderung mit Hilfe desselben Beweises zeigen, dass die Kräfte sich wie die Geschwindigkeiten verhalten. Man lasse nämlich dieselbe Kugel sich statt mit 2 nur mit einem Grad Geschwindigkeit bewegen und zwar in derselben Richtung; ferner sei die Feder im stande nur einen halben Grad Geschwindigkeit in senkrechter Richtung zu zerstören, so werde nach demselben Gedankengange folgen, dass diese Kugel vier ähnliche Federn schliessen werde, bevor die Kraft erschöpft sei, so dass die nämliche Kugel die nämliche Zahl von Federn schliesse, nur sei der Widerstand derselben halb so gross, also auch der Effekt nur der halbe; demnach verhielten sich die Kräfte wie 2 : 1, das heisst wie die Geschwindigkeiten. Der Beweis könne demnach nicht richtig sein, weil er beide Theorien beweise.

Dieser Einwurf lässt sich aber im Sinne Bernoulli's leicht auf folgende Art zurückweisen und zwar in allgemeinster Form:

Gesetzt der Körper C im erwähnten Beispiele habe die Geschwindigkeit $2\varkappa$, wo $\varkappa$ ganz oder gebrochen sein kann, so lässt sich leicht beweisen, dass er die Fähigkeit besitzt, 4 Federn zu schliessen, deren jede für sich die Geschwindigkeit $\varkappa$ erfordert, um geschlossen zu werden. Das Verhältnis der Totaleffekte, d. h. der lebendigen Kräfte, bleibt also immer 4 : 1, — und hier handelt es sich nur um dieses Verhältnis — mögen auch diese Effekte an sich kleiner oder grösser werden. Wäre der Einwand Eames' richtig, so könnte man mit dem Bernoulli'schen Beispiele nicht bloss

die beiden hier erwähnten Theorien, sondern jede andere als richtig erweisen. Eames scheint also mit seinen Widerlegungen nicht besonders glücklich gewesen zu sein.

## Vierter Abschnitt.

XXIV. Wir gehen nun zu einer Reihe von Arbeiten über, welche sämtlich in das Jahr 1728 fallen und in der Histoire de l'academie royale des sciences veröffentlicht sind. Sie wenden sich mit Ausnahme der an erster Stelle erwähnten sämtlich gegen die neue Theorie.

Zunächst mögen hier die Gedanken des Abbé Camus Platz finden, welche er in seiner Arbeit du mouvement acceleré par des ressorts et des forces qui resident dans les corps en mouvement niedergelegt hat. Der Verfasser stellt sich vor, dass ein Körper statt eine Feder vor sich herzuschieben, mit seiner Geschwindigkeit in derselben Zeit über eine Kurve hinaufsteigen könne und behauptet, Kraft und Effekt müsse hiebei gleich sein.

Hat man zwei Körper mit den Massen m, $\mu$, welche sich über ähnliche und ähnlich liegende Polygone mit sehr stumpfen Winkeln bewegen; die Anfangskräfte seien f, $\varphi$, die in entsprechenden Punkten erlangten Geschwindigkeiten u, v, die Längen der Polygone e, $\varepsilon$, die Zeiten, welche zum Durchlaufen nötig sind, t, $\vartheta$, so ist

$$1)\quad f \cdot t^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon = \varphi \cdot \vartheta^2 \cdot m \cdot e;$$
$$2)\quad f \cdot e \cdot \mu \cdot v^2 = \varphi \cdot \varepsilon \cdot m \cdot u^2;$$
$$3)\quad f \cdot t \cdot \mu \cdot v = \varphi \cdot \vartheta \cdot m \cdot u;$$
$$4)\quad t \cdot \varepsilon \cdot u = \vartheta \cdot e \cdot v.$$

Der Beweis für diese Formeln würde uns aber zu weit führen. Camus betrachtet dann m, $\mu$, als Massen von Körpern, welche durch ähnliche Federreihen eine beschleunigte Bewegung erhalten, f, $\varphi$ als die Kräfte dieser Federreihen, wenn sie geöffnet werden, u, v als die Geschwindigkeiten, welche die

Massen bei Öffnung der Federreihen erreichen, e, $\varepsilon$ als die Längen dieser Reihen, t und $\vartheta$ als die Zeiten und betrachtet so diese Gesetze auch als diejenigen, welche bei der Bewegung durch Federn in Geltung treten.

Hat man zwei ungleiche Reihen gleicher Federn und sind die Massen m und $\mu$ gleich, so erlangen diese bei der Bewegung Geschwindigkeiten, welche sich wie die Wurzeln aus den Längen der Reihen oder wie die Wurzeln aus den Zahlen der Federn verhalten; denn da in diesem Falle $f = \varphi$ und $m = \mu$ so ergibt sich aus der obigen zweiten Gleichung $u : v = \sqrt{e} : \sqrt{\varepsilon}$. Ist $f = \varphi$ und $m : \mu = \varepsilon : e$, so ist $m \cdot u = \mu \cdot v$; $t = \vartheta$. Wenn also ein Körper m mit der Geschwindigkeit u eine Feder schliessen kann, so kann ein Körper $\frac{m}{100}$ mit der Geschwindigkeit 100 u in der nämlichen Zeit 100 Federn schliessen. Indes kann der Körper m mit seiner Geschwindigkeit u nicht die Reihe mit der Federnzahl p (100) schliessen, wiewohl seine Bewegungsgrösse jener des Körpers $\frac{m}{p}$ gleich ist. Es gibt also gleiche Bewegungsgrössen, welche nicht im stande sind, gleiche Federreihen zu schliessen. Ferner ist $e : \varepsilon = m u^2 : \mu v^2$.

Sind zwei Federreihen gleich und aus gleichen Federn gebildet, so ist $u : v = \sqrt{\mu} : \sqrt{m}$; $t : \vartheta = \sqrt{m} : \sqrt{\mu}$. Demnach müssen Massen, welche aus Höhen herabfallen, die ihnen selbst reciprok sind, zwei gleiche Federreihen schliessen.

Wenn ein Körper auf eine weiche Masse, z. B. Thon fällt, so kann man den Widerstand dieser Materie betrachten, wie den Widerstand, welchen eine Federreihe beim Zusammendrücken ausübt. Also werden Körper mit den Massen m und $\mu$, welche den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten reciprok proportional sind, oder welche von Höhen herabfallen, welche ihren Massen reciprok proportional sind,

gleiche Grübchen in den Thon schlagen. Ist $e : \varepsilon = f : \varphi$, so ist $u : v = \sqrt{\mu} : \sqrt{m}$; ist ausserdem noch $m = \mu$, so ist $u = v$. Ein Körper m, welcher also p Federn durch seine Geschwindigkeit schliessen kann, kann sie auch dann schliessen, wenn sie zu einer einzigen vom p-fachen Widerstande vereinigt sind. Bestehen zwei Reihen aus gleichen Federn, dann ist $e : \varepsilon = m u^2 : \mu v^2$; allgemein $f \cdot e : \varphi \cdot \varepsilon = m \cdot u^2 : \mu v^2$. Die Geschwindigkeit, welche ein Körper m haben muss, um in der Richtung seiner Bewegung p gleiche Federn nach einander zu schliessen, verhält sich zu der, welche er haben muss, um nur eine Feder zu schliessen, wie $\sqrt{p} : \sqrt{1}$. Es ergibt sich ferner, dass der Körper dieselbe Geschwindigkeit haben muss und also dieselbe Kraft, um p gleiche Federn nach einander oder auf einmal zu schliessen. Wenn ein Körper m mit der Geschwindigkeit u ebensoviel Kraft hat, als er haben muss, um eine Feder, gegen welche er senkrecht stösst, zu schliessen, so wird er mit der Geschwindigkeit $u \sqrt{p}$ p Federn eine nach der anderen schliessen, wenn sie nämlich dieselbe Kraft und Grösse haben wie die erste und wenn eine jede von ihnen die Geschwindigkeit u erfordern würde, um geschlossen zu werden.

Man braucht die nämliche Arbeit und folglich auch die nämliche Kraft für einen Körper m, um zu schliessen 1) eine zusammengesetzte Reihe von p gleichen Federn, 2) diese p Federn, wenn sie der Art vereinigt sind, dass sie nur eine ausmachen, deren Widerstand sich zu dem der einzelnen wie p : 1 verhält, 3) um diese p Federn eine nach der andern in derselben Richtung zu schliessen, 4) um p Federn eine nach der andern zu schliessen, mag man auch die Bewegung des Körpers m zerlegen wie man will, 5) um diese p Federn zu schliessen, indem man einer Zahl p — 1 von Körpern an den Federn so viel Geschwindigkeit mitteilt, als sie nötig haben, eine Feder

zu schliessen und doch noch so viel übrig behält, die letzte zu schliessen.

Aus all dem ergibt sich deutlich, dass die Zahl der Federn multipliziert mit dem Widerstande sich verhält wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche sie zum Schliessen der Federn haben müssen. Nimmt man also die Widerstände der Federn als absolute Widerstände und den Weg, welchen sie durchlaufen als Zahl der Hindernisse, so ergibt sich, dass die Produkte aus der absoluten Grösse und der Summe der Hindernisse, welche Körper bei der Bewegung überwinden können, sich immer verhalten wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Wenn ein Körper m mit der Geschwindigkeit u nur eine Feder schliessen kann, so kann ein Körper $\frac{m}{p}$ mit der Geschwindigkeit pu und folglich mit derselben Bewegungsgrösse p Federn schliessen. Gleiche Bewegungsgrössen können also sehr verschiedene Effekte erzeugen; trotzdem werden sich gleiche Bewegungsgrössen Gleichgewicht halten. Das lässt sich dadurch zeigen, dass gleiche Bewegungsgrössen bei gleicher Zeit gleich sind, mögen auch die Effekte verschieden sein und zwar mit Hilfe eines Hebels, an dessen einem Arme die Masse m mit der Geschwindigkeit u eine Feder drückt, während an dem anderen Arme die Masse $\frac{m}{p}$ mit der Geschwindigkeit pu p Federn presst. In diesem Falle tritt in der That Gleichgewicht ein und es ist $m \cdot u = \frac{m}{p} \cdot p\,u$. Bei all diesen Untersuchungen ist die Grösse der Federn völlig gleichgiltig; man kann sie als unendlich klein annehmen und schliesslich ganz vernachlässigen.

Über die verschiedenen Arten, Kräfte zu messen, bemerkt Camus Folgendes:

Man kann die Kraft, welche in einem Körper ist, betrachten, insoferne sie gegenwärtig ist und einem unteilbaren Augenblicke entspricht. So betrachtet kann die Kraft gemessen werden durch den Druck oder Effekt, welchen sie auf einen unüberwindlichen Widerstand ausübt, weil dieser sie in dem unteilbaren Augenblicke, welchem sie entspricht, vernichtet.

Aber harte Körper, deren Geschwindigkeiten ihren Massen reciprok sind und deren Bewegungsgrössen Gleichgewicht unter ihnen herstellen, leisten sich in einem unteilbaren Augenblicke gegenseitig unbesiegbaren Widerstand. Also sind die Kräfte, welche diese Körper in dem unteilbaren Augenblicke eines Stosses besitzen, gleich und folglich sind die Kräfte, welche bei der Bewegung in einem Körper sind, in jedem unteilbaren Augenblicke gleich, wenn die Bewegungsgrössen gleich sind. Es ist aber klar, dass die Kraft so betrachtet eigentlich nicht die Kraft eines Körpers bei der Bewegung ist; denn diese Kraft entspricht einem Augenblicke, während dessen gar kein Weg durchlaufen wird und ohne Weg gibt es keine Bewegung. Es ist das vielmehr eine tote Kraft, weil sie bloss eine Bewegung zu erzeugen strebt; also ist das Maſs der toten Kraft proportional dem Produkte aus der Masse in die virtuelle Geschwindigkeit.

Man kann die Kraft eines bewegten Körpers betrachten als die Summe aller toten und momentanen Kräfte, welche den Körper während seiner Bewegung begleiten. Die Summe dieser Kräfte wird sich verhalten wie das Produkt aus der Masse in die Summe der Geschwindigkeiten, welche während der Bewegung vorhanden waren; die Summe dieser Geschwindigkeiten ist aber der Weg, welcher durchlaufen wurde; also ist die Summe aller Kräfte gleich dem Produkte aus Masse und Weg.

Nennt man also p und $\pi$ die Summen der toten Kräfte, welche die Massen m und $\mu$ bei der Bewegung begleitet haben,

so ist nach der obigen Bezeichnungsweise: $p : \pi = m \cdot e : \mu \cdot \varepsilon$. Ist $f = \varphi$ und $t = \vartheta$, also $m \cdot u = \mu \cdot v$, d. h. sind die Massen den Geschwindigkeiten oder den Längen der Federreihen reciprok, so ist $p = \pi$.

Ebenso wenn $f : \varphi = m : \mu$ und $m \cdot u^2 = \mu \cdot v^2$, was eintritt, wenn die Massen von Höhen herabfallen, welche ihnen reciprok sind. Man darf aber deshalb nicht meinen, dass die Kräfte p und $\pi$ beim Zusammenpressen der Federn oder beim Eindringen in Thon gleich wären; denn wenn man $e = \varepsilon$ nimmt, so ist $p : \pi = m : \mu$, aber nicht $p = \pi$. Wenn also die Kräfte p und $\pi$ auch während des Falles gleich sind, so sind sie doch nicht mehr gleich beim Eindringen in den Thon.

Zu bemerken ist, dass die Kräfte p und $\pi$ von bewegten Körpern in dem Sinne betrachtet, als wären sie die Summen aller Kräfte, welche die Körper m und $\mu$ während ihrer Bewegung begleiten, nicht die lebendigen Kräfte im Sinne Bernoullis sind 1) weil sie nicht gleichzeitig ein bewegter Körper sind, sondern nacheinander, 2) weil die Kräfte der Körper so betrachtet sich nicht immer verhalten wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten. Denn macht man $f = \varphi$, so ist $p : \pi = m^2 \mu^2 : \mu^2 v^2$, aber nicht $p : \pi = m u^2 : \mu v^2$ und macht man überdies $t = \vartheta$ oder $m \cdot u = \mu v$, so ist $p = \pi$ und nicht $p : \pi = m u^2 : \mu v^2$. Bernoulli kann also nicht p und $\pi$ als die lebendigen Kräfte der Körper nehmen.

Die Hindernisse, welche Körper überwinden, verhalten sich immer wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten. Denn wenn ein Körper bei der Bewegung Federn schliesst, findet er als Hindernisse ihre Zahl und ihre Elasticität; also verhalten sich diese Hindernisse wie $f \cdot e : \varphi \cdot \varepsilon$. Da aber $f \cdot e \cdot \mu \cdot v^2 = \varphi \cdot \varepsilon \cdot m \cdot u^2$, so ist $f \cdot e : \varphi \cdot \varepsilon = m \cdot u^2 : \mu v^2$. Und das ist der Grund, warum bei der Schätzung der Kräfte durch überwundene Hindernisse die

Kräfte sich verhalten wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten. Die lebendigen Kräfte in diesem Sinne genommen, stimmen denn auch mit denen Bernoullis überein.

XXV. Eine ganz eigenartige, aber deswegen nicht minder bemerkenswerte Ansicht vertritt Mairan in seiner Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps.

Kraft ruft Bewegung hervor; diese kann gleichförmig sein oder nicht. Für die erstere gibt es kein einfacheres Mafs als das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit; denn die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege sind ihre Effekte. Aber diese dienen nicht dazu, die Frage nach dem Mafse der Kräfte überhaupt zu entscheiden, oder sie entscheiden sie vielmehr im Sinne der bisherigen (cartesianischen) Ansicht. Bei gleichförmigen Bewegungen hat man immer drei proportionale Grössen: Kraft, Geschwindigkeit, Bewegung.

Indes könnte man die Bewegungsgrösse auch auf andere Art betrachten, indem man sie nämlich bald grösser bald kleiner macht, ohne im geringsten an der bewegenden Kraft etwas zu ändern dadurch, dass man sich vorstellt, diese Kraft wirke mehr oder mindere Zeit auf das Bewegliche, bevor sie auf ein Hindernis trifft. Aber man sieht, dass dieser Ausdruck für die Bewegungsgrösse nicht im stande ist, uns eine Vorstellung von der ursprünglich bewegenden Kraft zu geben.

Man spricht von der Kraft oder von der Bewegung in einem beliebigen Zeitteile, unabhängig von der Dauer dieser Kraft und dieser Bewegung vor oder nach der Zeit, welche man zu ihrer Bestimmung fixiert hat. Wenn es sich aber darum handelt zu wissen, welches das Verhältnis zweier Kräfte oder zweier Bewegungen ist, so muss man notwendigerweise annehmen, die Wege seien gleich oder die Zeiten oder es muss mindestens ein konstantes Verhältnis

zwischen Weg und Zeit festgesetzt sein. Der Umstand und die gemeinsame Begrenzung der Zeit ist also absolut notwendig, um sich eine bestimmte und numerische Idee von Kraft und Bewegung machen zu können, und jede andere Art sie zu betrachten, läuft auf eine Hypothese hinaus.

Der Stoss absolut harter Körper bringt keine Änderung in der gleichmässigen Bewegung hervor, nur dass die Kraft sich auf eine grössere Masse verteilt und die Geschwindigkeit kleiner wird im umgekehrten Verhältnisse zur Masse. Das wird von Allen zugestanden. Anders bei der verzögerten Bewegung, beim Stosse weicher Körper, bei Federn.

Der Name lebendige Kraft soll hier nur die Ansicht bezeichnen, nach welcher die bewegende Kraft durch das Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit gemessen wird. Experimente müssen diese lebendige Kraft rechtfertigen. Das erste Experiment, welches dazu Anlass gegeben hat, ist genommen von der beschleunigten Bewegung und es ist gut gewählt; denn es entspricht allen anderen Fällen. Die Verschiebungen einer Materie, die Vertiefungen, die Abplattungen der Teilchen, welche in einem weichen Körper gemacht werden mit Hilfe der Kraft und der Geschwindigkeit des Beweglichen lassen dieselbe Analogie zu. Dasselbe muss sich beim Stosse elastischer Körper zeigen. An der Thatsache besteht kein Zweifel; es lässt sich zeigen, dass sie eintreten müssen nach der Theorie, die am sichersten ist; es handelt sich nur darum, ob auch die Konsequenzen richtig sind.

Die Ursachen sind ganz gewiss den Effekten proportional; aber wir vergessen dabei nicht, dass, wenn man von einer Proportion spricht, dabei an ein gemeinsames Mafs gedacht wird. Und dieses gemeinsame Mafs ist die Zeit; wenigstens kann man die Zeit oder gleiche Zeiten für den Ausdruck des gemeinsamen Mafses zweier Kräfte nehmen, welche verglichen werden. „Aber das angenommen finde ich in dem Effekte eines

Körpers, welcher zweimal mehr Geschwindigkeit hat", behauptet Mairan, „nur einen doppelten und nicht einen vierfachen Effekt, einen doppelten durchlaufenen Weg, ein doppeltes Verschieben der Materie in gleichen Zeiten. Also ist auch die bewegende Kraft nur die doppelte, nicht die vierfache, sie verhält sich nur wie die erste Potenz der Geschwindigkeit und nicht wie ihr Quadrat."

Wir finden hier den Einwurf wieder, welcher gegen Leibnitz, wie wir gesehen haben, in allererster Linie erhoben worden, nämlich den, dass man beim Mafse der Kräfte auch die Zeit berücksichtigen müsse und den Leibnitz selbst noch in ausführlichster Weise widerlegte. Um so auffallender ist es, dass Mairan hier keine Silbe davon erwähnt. Sollte ihm der Streit zwischen Leibnitz und Catelan unbekannt gewesen sein? — Das lässt sich indes nicht leugnen, dass Mairans Einwürfe weit gewichtiger sind, als jene Catelans es waren. „Dass der Gesammteffekt nur in der doppelten Zeit vierfach sein kann", fährt er fort, „wird mit Rücksicht auf den durchlaufenen Weg nicht bezweifelt werden können. Um sich davon vollständig zu überzeugen, darf man nur die beschleunigte Bewegung auf eine einfache zurückführen, wie dies A. de Fontenelle nach dem Vorgange des Chevalier de Louville gethan hat (hist. de l'acad. 1721). Denn da man weiss, dass die Wege, welche mit der durch die Acceleration erlangten Geschwindigkeit gleichmässig durchlaufen würden, doppelt so gross wären, als diejenigen, welche bei gleichmässig verzögerter Bewegung durchlaufen werden, so folgt, dass der eine Körper, welcher mit der Geschwindigkeit 1 während 1 Sekunde aufsteigt und nur 1 Toise durchläuft in Folge der Verzögerung, 2 durchlaufen würde, wenn seine Bewegung gleichmässig gewesen wäre und dass derselbe Körper mit der Geschwindigkeit 2, welcher 4 Toisen in 1 Sekunde durchlaufen hätte, in 2 Sekunden 8 Toisen durchlaufen würde in Folge derselben Geschwindigkeit, aber bei gleichförmiger Be-

wegung. Daraus folgt, dass, wenn man die beiden Bewegungen in gleichen Zeiten verfolgt, man in jeder Sekunde nur 2 durchlaufene Toisen findet von Seiten des Körpers, welcher die Geschwindigkeit 1 hatte und vier von dem, der die Geschwindigkeit 2 besass. Also können die bewegenden Kräfte, deren Grössen durch die Längen dieser Wege gemessen werden, sich nur verhalten wie ihre Wurzeln oder wie die einfachen Geschwindigkeiten.

Diese Zurückführung der beschleunigten Bewegung auf die gleichförmige zeigt ihre Analogien und kann keinen Irrtum hereinbringen. Sie kann nichts ändern in der Grösse der Kraft, welche in einem Körper sitzt in dem Augenblicke, in welchem er sich bewegt, welches auch die Bewegung sein mag, verzögert oder einfach. Denn indem man die bewegende Kraft immer als die gleiche annimmt, handelt es sich, wenn man eine gleichförmige Bewegung herstellen will, welche dieselbe Kraft hervorbringen sollte, nur darum, die Widerstände zu entfernen, welche den Körper auf seinem Wege hindern und seine Kraft allmählich aufzehren könnten. Und um aus einer gleichförmigen Bewegung eine verzögerte zu erhalten, darf man nur jene Widerstände einführen. Ähnliches gilt von der Aushöhlung der Grübchen, der Abplattung und anderem. Die Analogie allein genügt, um zu zeigen, dass die zweifache Kraft in Folge der doppelten Geschwindigkeit auch zweimal mehr Zeit braucht, um zu verschwinden, wie die einfache; das lässt sich auch a priori beweisen. Indes ist es klar, dass doppelte Effekte in gleichen Zeiten und vierfache in doppelten Zeiten nur bei doppelter Geschwindigkeit entstehen, kurz dass Effekte den Geschwindigkeiten, nicht ihren Quadraten proportional sind. Allein eine derartige Erklärung ist doch nicht hinreichend, die Schwierigkeit zu heben und die Sache aufzuklären. Denn man könnte verschiedene Einwürfe dagegen erheben. Ein Körper, welcher in der Zeiteinheit 2 Toisen zurücklegt, muss

doch im Vergleiche mit einem anderen, welcher in derselben Zeit 1 Toise macht, erst nach der doppelten Zeit zu wirken aufhören, könnte man sagen. Also muss der Totaleffekt, welcher sich aus dem doppelten Umstande der Zeit und der Geschwindigkeit ergibt, der vierfache sein, d. h., da Zeiten und Geschwindigkeiten im gleichen Verhältnisse stehen, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein. Warum sollten aber die Kräfte nicht im nämlichen Verhältnisse stehen, wie die Effekte, welche sie hervorbringen, mögen auch die Zeiten sein wie sie wollen? So könnte man entgegnen."

Darin liegt also die Schwierigkeit und die Quelle des entstandenen Übels. Mairan verspricht eine ganz aussergewöhnliche Lösung der Schwierigkeit; er komme dabei zu dem Resultate, dass die Kraft der Bewegungsgrösse proportional zu setzen sei, sowohl bei gleichförmigen als auch bei beschleunigten und verzögerten Bewegungen, welche sich auf gleichförmige zurückführen liessen. Es sei unnütz anzuführen, wie dies schon oft geschehen sei, dass ein Mensch viermal mehr Kraft brauche, um ein Gewicht vier Meilen weit zu tragen, als wenn er es bloss eine Meile weit tragen müsste. Freilich müsste er viermal mehr Kraft anwenden; aber die Kraft, welche er auf der vierten Strecke anwenden müsse, unterscheide sich der Grösse nach nicht von der auf der ersten Strecke. Aber daraus folge noch nicht, dass er auf der ersten Strecke ein viermal grösseres Gewicht hätte tragen können. Das komme daher, dass es nicht immer möglich sei, eine Kraft in einem bestimmten Augenblicke wirken zu lassen, welche sich in mehreren Zeitteilen allmälich auflöse und dass sich hier tausend physikalische Verhältnisse einmengten, welche keinen Vergleich mit der Kraft und dem Beweglichen zuliessen. Also viermal dieselbe Kraft nacheinander zu haben, sei nicht dasselbe als in einem Augenblicke die vierfache Kraft zu besitzen.

Wenn die Experimente zu zeigen scheinen, dass die

Kräfte sich verhalten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, so gebe es ein viel einfacheres, allgemein anerkanntes, welches gerade das Gegenteil ergebe. Es sei das von zwei bewegten Körpern, welche mit entgegengesetzter Richtung an einander stossen, und deren Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie ihre Massen. Denn man wisse, dass sich Ruhe daraus ergibt, wenn die Körper nicht elastisch sind und dass sie nach dem Stosse mit der nämlichen Geschwindigkeit umkehren wie vor dem Stosse, wenn sie elastisch sind. Aber gerade das Gegenteil müsse sich ergeben, wenn die Kräfte sich verhielten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; ein Körper z. B. mit der Masse 1 und der Geschwindigkeit 3, also der Kraft 9, müsse notwendig einen anderen mit der Masse 3 und der Geschwindigkeit 1, also der Kraft 3 übertreffen.

Man sage freilich diese dreifach grössere Kraft sei durch Verschiebungen der Materie verbraucht worden; aber der Angriffspunkt dieser Verschiebungen sei doch wieder der Schwerpunkt der dreifachen Masse, welche nur die Geschwindigkeit 1 habe; und diese Masse verbrauche ebensoviel Kraft diese Verschiebungen auszuhalten, als der stossende Körper verliere, sie zu erzeugen; es gebe doch keine verlorenen Kräfte in dem Sinne. Wenn sich die Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhielten, so müsste also der Körper, welcher Masse 1 und Geschwindigkeit 3 hat von dem mit Masse 3 und Geschwindigkeit 1 mit mehr Kraft zurückgestossen werden als er vor dem Stosse hatte.

Eine andere Frage wäre die, ob nicht eine Kraft, welche im Verhältnisse der einfachen Geschwindigkeit bleibt, Effekte hervorbringen könnte, welche dem Quadrate derselben proportional wäre. Statt dass man den Schluss zöge: eine Kraft ist vierfach, weil ihr Effekt es ist, würde man dann im Gegenteil schliessen müssen: weil diese Effekte sich wie die

Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, verhalten sich die Kräfte nur wie ihre ersten Potenzen.

Es handelt sich nun darum, sich von der Wahrheit der Behauptung zu überzeugen, dass eine Kraft, die sich ja aus der Geschwindigkeit des Beweglichen, in welchem sie sitzt, ergibt, gegen die successiven Widerstände und zwar in gleichen Zeiten im Verhältnisse der Geschwindigkeiten wirkt und dass sie sich während einer Zeit entfaltet, welche eben dieser Geschwindigkeit proportional ist; das gibt eine Totalwirkung, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, der Art dass, während die durchlaufenen Wege, die Drucke, die Verschiebungen der Materien sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, die Kräfte, welche diese Wirkungen hervorbringen, sich nur wie die einfachen Geschwindigkeiten verhalten.

Zwei Körper A und B gleicher Masse sollen sich völlig frei so bewegen, dass die Geschwindigkeit des einen doppelt so gross ist als die des anderen; dann wird der eine in der gleichen Zeit doppelt so viel Toisen zurücklegen als der andere. Also muss man wenigstens bis hieher annehmen, dass die Kräfte sich verhalten wie die Geschwindigkeiten und wie die durchlaufenen Wege. Wenn sie aber der Art sind in dem Augenblicke, in welchem sie zu wirken beginnen bei Annahme einer gleichförmigen Bewegung, warum sollte man nicht ebensolche annehmen können unter der Voraussetzung einer verzögerten Bewegung? Hindernisse, Widerstände anzunehmen, ändert nichts an der Grösse einer Kraft. Wenn man also aus der Hypothese, dass die bewegende Kraft der Geschwindigkeit proportional sei, schliesst, dass die durchlaufenen Wege sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, so bleibt kein anderer Ausweg, als anzunehmen, dass die Kräfte sich verhalten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; das wäre gegen die Gesetze der Logik.

Zwei Körper sollen sich mit verzögerter Bewegung be-

wegen und zwar so lange bis ihre Bewegung aufhört. Die Bewegung des einen sei in 1 Sekunde fertig und zwar durchlaufe er statt zwei Toisen, welche er ohne Verzögerung durchlaufen hätte, nur eine. Dann wird in Folge der fortwährenden Gleichheit der Stösse durch die Schwere in derselben Zeit der andere Körper um ein ähnliches Stück Weg weniger zurücklegen, welches auch das Verhältnis der Endgeschwindigkeiten beider Körper sein mag. Also wird A statt 4 Toisen zu durchlaufen in einer Sekunde nur 3 zurücklegen. Die erlangten Geschwindigkeiten verhalten sich aber wie die Zeiten; also wird A, welcher 2 Grad Geschwindigkeit hatte, nur 1 Grad oder die Hälfte seiner Geschwindigkeit verlieren, B aber verliert sie ganz, weil er nur 1 Grad hatte. Aber die Geschwindigkeit 1 muss den Körper A in einer Sekunde denselben Weg durchlaufen machen wie B; also durchläuft A noch eine Toise und demnach im Ganzen deren 4. Also hat sich A in Folge einer doppelten Kraft, welche sich aus der doppelten Zeit ergibt, zweimal so lange bewegt wie B und hat in jedem Zeitteilchen den doppelten Weg zurückgelegt, was im ganzen den vierfachen Weg ausmacht, also ein Verhältnis gleich dem der Quadrate der Geschwindigkeiten ergibt. Aber es bedarf nur einer Aufklärung, um den inneren Widerspruch zu heben. A hat zweimal so viel Weg zurückgelegt in jeder Zeit durchschnittlich, aber nicht in jedem Augenblicke absolut genommen; denn er durchläuft in der ersten Zeiteinheit 3, in der zweiten nur 1 Toise. Die Kraft aber und die Geschwindigkeit sind in jedem Augenblicke doppelt, weil sie hinsichtlich der Stärke, solange sie in dem nämlichen Verhältnisse bleiben zu der Kraft und Geschwindigkeit von B, denselben Effekt hervorbringen müssen, wie bei der gleichförmigen Bewegung. Aber weil das Verhältnis sich fortwährend ändert in den aufeinander folgenden Zeiten, muss der wirklich durchlaufene Raum nicht in demselben Verhältnisse stehen sondern in demjenigen, welches sich aus der

wechselnden Folge dieser Verhältnisse ergibt. Der von A in der ersten Zeit durchlaufene Weg ist mehr als doppelt so gross wie der von B durcheilte und dieses Verhältnis steigert sich sogar bis zur Unendlichkeit, weil A noch die Geschwindigkeit 1 hat, während B sich gar nicht mehr bewegt. A durchläuft also in jedem Augenblicke einen Weg, welcher der Geschwindigkeit proportional ist, die er in diesem Augenblicke hat. Nach dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten also, welche A und B beim Beginne der Bewegung haben, muss der eine 4, der andere 2 Toisen durchlaufen und sie würden sie auch durchlaufen, nähmen nicht die entgegengesetzten Stösse der Schwere in gleichen Zeiten von jedem Wege eine Toise weg. Um die Richtigkeit dieser Bemerkung besser zu verstehen, wollen wir einen Geschwindigkeitsgrad in beliebig viele Teilchen zerlegen, etwa 8 und 4; dann hat man in den 8 Augenblicken von A die Wege 15, 13, 11; . . . und in den vieren von B die Wege 7, 5 . . ; der Unterschied vom Verhältnisse $^1/_2$ beträgt dann im ersten Augenblicke nur mehr $^1/_{15}$, während er im obigen Falle $^1/_3$ betrug. Nimmt man 10 und 5 so ist die Differenz noch $^1/_{19}$ u. s. w. bis zur Unendlichkeit, wo der Unterschied ganz verschwindet und man sagen kann, dass im ersten Zeitteilchen der von A durchlaufene Weg genau doppelt so gross ist wie der von B. Dennoch aber wird der Weg des A mehr als doppelt so gross sein, weil die Abnahme der Geschwindigkeit bei beiden Körpern in einer arithmetischen Progression auftritt, woraus sich ergibt, dass das Verhältnis der Geschwindigkeit des grösseren Körpers A grösser werden muss im Vergleiche zur Geschwindigkeit des kleineren B. Aber der durchlaufene Weg ist fortwährend proportional der aktuellen Geschwindigkeit wie bei gleichförmiger Bewegung.

Nun ist noch nicht gezeigt, warum A sich zweimal länger bewegt als B trotz der Hindernisse, welche sich im ersten Momente und zwar im Verhältnisse seiner grösseren

Kraft und Geschwindigkeit erheben. Es scheint im Gegenteil, dass das Bewegliche, welches die grössere Geschwindigkeit hat, nachdem es in jedem Augenblicke einen Widerstand proportional seiner Geschwindigkeit überwunden, Alles geleistet hat, was es leisten konnte, falls seine Kraft nur der einfachen Geschwindigkeit proportional wäre. Man muss aber darauf achten, dass der eine Körper an Kraft und Geschwindigkeit in der gleichen Zeit nur so viel verliert wie der andere. Das heisst also die Verluste an Kraft und Geschwindigkeit von Körpern, welche verschiedene Räume durchlaufen, verhalten sich immer wie die Zeiten, welche nötig sind, einen von diesen Wegen zu durcheilen und die Widerstände wirken um so mehr, je länger sie wirken. Nun hat aber im obigen Falle B in der ersten Zeit schon all seine Geschwindigkeit verloren, während sich A noch fortbewegen kann. Und daher ist es klar, dass eine Kraft, welche aus einer grösseren Geschwindigkeit entspringt, sich langsamer auflösen muss, je grösser die Geschwindigkeit ist. Es liegt doch in der Natur einer beliebigen Kraft, in jedem Augenblicke im Verhältnisse der Geschwindigkeit zu wirken und um so länger zu wirken, je grösser eben diese Geschwindigkeit ist, woraus mit der Dauer der Wirkung Wege entstehen müssen, welche sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, wiewohl die Kräfte selbst im Verhältnisse der einfachen Geschwindigkeiten stehen.

Wie man nun daraus, dass die Bewegung eines endlichen Körpers mit endlicher Geschwindigkeit unendlich dauert, nicht schliessen darf, dass die aktuelle Kraft unendlich sei, so folgt auch nicht, dass die bewegende Kraft des nämlichen Körpers bei verzögerter Bewegung grösser wäre, deshalb weil sie länger dauern muss. Sie ist in der That nur grösser, weil sie in gleichen Zeiten grössere Wege durchlaufen lässt oder vielmehr sind diese Wege in gleichen Zeiten nur deshalb grösser, weil die Kraft in Folge der grösseren

Geschwindigkeit grösser ist. Die grösste Dauer ist, wenn man will, ein Kennzeichen der grössten Geschwindigkeit, aber nicht ein zweites Prinzip der Kraft, welches die Kraft vermehren muss; das würde ja heissen eine Kraft durch ihre Effekte und durch die Effekte ihre Effekte messen.

Bei gleichen Zeiten verhalten sich also die Drucke und die durchlaufenen Wege wie die einfachen Geschwindigkeiten und die Massen. Die Superiorität der Kraft des A lässt diesen nicht schneller über die Hindernisse hinweggehen, welche seiner Masse proportional sind, als B, wenn er über ähnliche Hindernisse laufen muss; er bewegt sich also weder länger noch kürzer als B. Die grössere Kraft bringt trotz der Masse in gleicher Zeit den nämlichen Effekt hervor vermöge der Geschwindigkeit; aber sie hört auf zu wirken, während die andere noch wirkt. Auch steigt A mit der Masse 100 nicht mehr mit der Geschwindigkeit 1 wie B, welcher die Geschwindigkeit 1 und die Masse 1 hat, weil er nicht länger steigt; und er steigt nicht länger, weil er in jedem Augenblicke die nämlichen Geschwindigkeitsverluste erleidet wie B, aber grössere Verluste an Kraft, weil diese seiner Masse proportional sind.

Wenn die Kraft in einem Körper grösser angenommen würde, ohne dass seine Geschwindigkeit dies im gleichen Verhältnisse wäre, wie dies der Fall ist bei einer grösseren Masse und der Fall sein würde bei den lebendigen Kräften, wenn es möglich wäre, dass bei gleichem Beweglichen die bewegenden Kräfte in einem anderen Verhältnisse stünden als dem der einfachen Geschwindigkeiten, dann würden die Hindernisse, welche im Verhältnisse der Kraft überstiegen werden, nicht auf einer grösseren Wegstrecke überstiegen, sondern sie wären in viel grösserer Zahl überstiegen als im Verhältnisse der Kraft. Wenn die Kraft im Verhältnisse der einfachen Geschwindigkeit einen vollen Sinn hat, so muss jeder andere Wert, welchen man ihr beilegt, damit im Wider-

spruche stehen und eine Kraft, welche wächst, ohne dass Masse oder Geschwindigkeit sich ändern, ist ein Effekt ohne Ursache.

Mairan zeigt nun — und darin liegt die Hauptkraft seiner Untersuchung, welche sie so wesentlich von allen anderen unterscheidet — 1) dass es nicht die vom Beweglichen bei der verzögerten Bewegung durchlaufenen Wege sind, welche die Schätzung und das Mafs der lebendigen Kräfte liefern, sondern vielmehr die nicht durchlaufenen Wege, welche bei einer gleichförmigen Bewegung in jedem Augenblicke durchlaufen worden wären; dass sich 2) diese nicht durchlaufenen Wege wie die einfachen Geschwindigkeiten verhalten und dass also 3) die Wege, welche einer verzögerten oder abnehmenden bewegenden Kraft entsprechen, insoferne sich diese bei ihrer Wirkung aufzehrt, proportional sind dieser Kraft und der Geschwindigkeit des Beweglichen und zwar eben so sehr bei der verzögerten Bewegung wie bei der gleichförmigen.

Der eben genannte Körper B legt in Folge der Schwere statt 2 Toisen nur 1 zurück, also 1 weniger als er frei zurückgelegt hätte und A statt 4 nur 3, also auch 1 weniger als er frei zurückgelegt hätte. Da A die Geschwindigkeit 2 und die Kraft 2 hatte, befindet er sich am Ende der zweiten Sekunde in dem Zustande, in welchem B am Anfange derselben war, das heisst, er könnte, wenn kein Hindernis vorhanden wäre, in der nächsten Sekunde noch 2 Wegeinheiten durchlaufen; in Folge der Schwere durchläuft er aber nur mehr eine und folglich sind die nicht durchlaufenen Wege 1 Toise und 1 Toise; sie sind nicht durchlaufen in der der bewegenden Kraft entgegengesetzten Richtung und in Folge der Wirkung einer anderen Kraft, welche der ersten entgegengesetzt ist.

Was von den nicht durchlaufenen Wegen gesagt wurde, gilt aber von allen Bewegungseffekten, wie von den Teilen der Materie, welche nicht vom Platze bewegt werden, von

den nicht gespannten Federn u. s. w.; sie sind es, welche das Mafs der bewegenden Kraft liefern. Sie repräsentieren in jedem Augenblicke die verlorene und aufgezehrte Kraft. Aber die Summe aller verlorenen Kräfte ist gleich der ganzen Kraft des Beweglichen. Der durchlaufene Weg drückt nur die Wiederholung der Totalkraft aus oder des Teiles, der von ihr erhalten bleibt, — ein Weg, der unendlich wäre, wenn sie erhalten bliebe. — Klar ist, dass die nicht durchlaufenen Wege, welche nur die in jedem Augenblicke und bei jedem Grade der verlorenen Geschwindigkeit wiederholte Einheit ausmachen, an Zahl gleich sind den Augenblicken und den Geschwindigkeitsgraden und dass folglich ihre Summe gleich oder proportional der einfachen Anfangsgeschwindigkeit der verzögerten Bewegung ist. Aber ihre Summe ist, wie oben bemerkt, der Kraft des Beweglichen proportional; also ist die Kraft der einfachen Geschwindigkeit proportional, sei es dass man sie in einem einzelnen Augenblicke oder in der ganzen Dauer betrachtet, wiewohl die überwundenen Hindernisse sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten. Bei jeder Bewegung also, mag sie beschleunigt, verzögert oder gleichförmig sein, verhalten sich die Effekte, welche der bewegenden Kraft entsprechen, wie die Kräfte selbst oder wie die Geschwindigkeiten, aus welchen sie entstehen.

Im Übrigen muss man berücksichtigen, was man schon lange wusste, bevor von lebendigen und toten Kräften die Rede war, dass die einfache momentane Anstrengung beim Gleichgewichte nicht verglichen werden kann mit der Anstrengung beim Stosse weicher oder biegsamer Körper, wie sie in der Natur vorkommen. Der Grund ergibt sich aus den eben aufgestellten Prinzipien. Der Effekt der Erschütterung bei diesen Körpern resultiert aus einer wirklichen endlichen Geschwindigkeit und der der einfachen Tendenz besteht in der Geschwindigkeit 0 oder einer unendlich kleinen

Geschwindigkeit; der Effekt der Erschütterung ist erzeugt und gemessen durch eine unendliche Folge von Augenblicken, welche in endlicher Zeit eintreten, die einfache Tendenz aber ist gemessen durch jeden beliebigen unzerlegbaren Augenblick ihrer Dauer; sie verhält sich zum Stosse wie 0 zu ∞ oder wie der Punkt zur Linie. Wenn man aber bei der blossen Tendenz eine unendliche Reihe von Augenblicken ihrer Dauer gleich der endlichen Dauer des Stosses integriert, dann sind Tedenz und Stoss analog. Und wenn diese beiden Reihen gleich sind, so werden sich Tendenz und Stoss verhalten wie der Weg, welcher bei gleichförmiger Bewegung in einer Zeit zurückgelegt wird, zu dem Wege, welcher bei beschleunigter oder verzögerter Bewegung in derselben Zeit durchlaufen wird; denn der Effekt der Tendenz ist konstant, der des Stosses aber variabel, der Art, dass wenn man die durchlaufenen Wege einer beschleunigten oder verzögerten Bewegung durch die Summe der Ordinaten eines rechtwinkeligen Dreiecks ausdrückt, dessen Basis der Anfangs- oder Endgeschwindigkeit und dessen Höhe der Summe der Augenblicke proportional ist, der Stoss durch die Fläche des Dreiecks, die Tendenz aber durch ein Parallelogramm mit gleicher Basis und Höhe ausgedrückt werden kann.

Das, was wir gewöhnlich die Kraft eines bewegten Körpers nennen, ist in der That nicht eine einfache oder lineare Grösse, sondern ein Produkt aus zwei Faktoren, ein Rechteck aus zwei Kräften, nämlich derjenigen, welche wir durch das Wort Masse ausdrücken und die wir uns im Innern des Beweglichen denken und derjenigen, welche wir spezieller Kraft nennen und von der man annimmt, dass sie von aussen durch den Stoss kommt. Von diesem Standpunkte aus wird sich die einfache Tendenz, Schwere, Druck, tote Kraft, sei es hinsichtlich der Masse allein oder hinsichtlich eines momentanen Effektes, der durch einen unbesieglichen, fortwährend wirkenden Stoss entsteht, zur lokalen Bewegung

und zum Stosse von unendlicher Dauer verhalten wie eine unendlich kleine Grösse zur endlichen oder wie eine Linie zur Fläche, — ohne Nachteil für den Vergleich, welchen man in einem anderen Sinne machen kann, indem man sie nämlich nur in einem gemeinsamen, unteilbaren Augenblicke vergleicht wie beim Stosse unendlich harter Körper.

In diesem Falle könnte auch die Unterscheidung zwischen lebendigen und toten Kräften nützlich sein. Aber nach dem Streite, welcher über diesen Gegenstand entstanden ist und dem Widerspruch der Meinungen, welchen er hervorgerufen hat, wäre es ein Missbrauch, sich des Ausdrucks lebendige Kraft zu bedienen, um zu sagen, was man bis jetzt ganz gut ohne denselben sagen konnte und um jede andere Sache damit zu bezeichnen als die, welche ihr Erfinder bezeichnet hat. Das würde den Glauben erwecken, als handelte es sich bei dem ganzen Streite bloss um ein Wort, während es sich doch um die Sache selbst dreht und als wollten wir uns mit einer scheinbaren Übereinkunft befriedigen statt mit einer wirklichen Vereinbarung, welche wir dort unnützer Weise suchen und in der That nicht zu finden wüssten.

Man hat für die Theorie der lebendigen Kräfte grossen Nutzen aus der Zerlegung der Kräfte und Bewegungen beim schiefen Stosse von Körpern gezogen, weil sich die Summe der Komponenten in der That viel grösser findet und oft gleich dem Quadrate der ursprünglichen Kraft oder der Geschwindigkeit. Das ist ein Punkt, der offenbar seine Schwierigkeiten haben kann; allein man kann sehen, meint Mairan, aus dem Wenigen, was er hierüber sagen will, dass es keinen Einfluss auf die Auffassung von Kräften und Bewegungen haben kann.

Erstlich wisse man, dass das Produkt mehrerer Faktoren von ihrer Summe verschieden sei. Wo findet sich also ein Widerspruch, wenn eine beliebige Kraft, welche man bei der Gesamtbewegung eines Körpers, in dem sie sich be-

findet, wie ein Produkt betrachtet, nicht die nämliche sei wie die, welche man finde aus der Summe ihrer Faktoren, wenn sie in ihre Faktoren zerlegt sei!

Zweitens unterscheide sich die Zusammensetzung und Zerlegung der sogenannten toten Kräfte in nichts von der einer aktuellen Bewegung. Indes gebe er zu, dass man, um in den Geist der lebendigen Kräfte einzudringen hier einen Unterschied machen müsse, der darin bestehe, dass bei der aktuellen Bewegung der Wert 1 einer jeden Feder oder eines jeden überwundenen Hindernisses als $1^2$ betrachtet werden müsse, während in dem Falle der einfachen Tendenz das 1 nur eine lineare Grösse für jede Kraft sei. Aber diese Differenz mache seiner Behauptung keinen Eintrag; es genüge, dass die Zerlegungen einer beliebigen Kraft diese übersteigen und eine grössere Summe geben als ihr Produkt ist — was er an einem Beispiele nachzuweisen sucht — in einem Falle, bei welchem lebendige Kräfte ohne Zweifel nicht statt haben, um all das zu entkräften, was man zu Gunsten der lebendigen Kräfte sagen könne.

Drittens menge sich hierein der Umstand der Zeit und trage zur Entwicklung der prinzipiellen Schwierigkeiten bei, welche sich hier begegneten; sie trete sichtlich mit ein bei der successiven Zerlegung oder vielmehr diese Zerlegungen und die Effekte des Stosses seien ein und dasselbe. Und in Betreff derjenigen, welche auf einmal entstünden oder in sehr kurzer Zeit, trete doch der Unterschied der Zeit auf bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes fester Körper und beim Transporte der Materie, welche sich daraus ergebe.

Aus allen diesen Bemerkungen ergebe sich, dass die bewegenden Kräfte der Körper sowohl selbst als auch in ihren Effekten im allgemeinen nur der einfachen Geschwindigkeit proportional seien, dass diese das gemeinsame Mafs der Wirkung der bewegenden Kraft wie ihrer Grösse sei. Und wenn einige von ihren Effekten wie etwa die bei der

beschleunigten oder verzögerten Bewegung durchlaufenen Wege, die bewegten Teilchen der Materie oder die durch den Stoss zusammengedrückten Federn sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten zu verhalten schienen, so komme dies in allen Fällen daher, dass die Kraft, welche in jedem Zeitteilchen im Verhältnisse der aktuellen Geschwindigkeit wirke, nach dem allgemeinen Gesetze der Bewegungen in Folge der Verzögerung auch um so länger wirke, je grösser sie sei. Die Wirkung einer doppelten Kraft sei also nur deshalb vierfach, weil die Dauer ihrer Wirkung in Folge der Verzögerung die doppelte sei; und die Dauer sei nur deshalb die doppelte, weil das Bewegliche um die Hälfte weniger Zeit bei einem jeden Hindernisse in Ruhe bleibe; und dieses nach dem Prinzipe, dass jeder Widerstand um so weniger eine Kraft vermindere, je kürzer er dauere. Die vierfachen Wirkungen in doppelter Zeit könne nur eine doppelte Kraft erzeugen; sie würden achtfach werden oder sich wie die Kuben der Geschwindigkeiten verhalten, wenn sie eine vierfache Kraft anzeigen sollten. Hierin liege das Gesetz und wahre Mafs der Kräfte, ihren eigenen Wirkungen entnommen, soferne ihre Wirkung eine dauernde sei; aber auch falls sie sich aufzehrten, ergebe sich kein anderes Mafs. Die Effekte, welche ihren Verlusten analog, ihren negativen Kräften und folglich ihnen selbst proportional seien, seien dies auch zu ihren eigenen Geschwindigkeiten. Sonst wäre ja auch die Natur in diesem Punkte nicht völlig gleichförmig, wie sie es doch fast immer in den wesentlichen Teilen ihrer Erscheinung sei. —

XXVI. Die Ideen Mairans wurden von der Frau Marquise von Chatelet bekämpft, einer Dame, welche selbst ein Lehrbuch der Physik schrieb und welche in den Kreisen der Gelehrten ihrer Zeit in hohem Ansehen gestanden zu sein scheint. Das Original ihres ersten Einwurfes stand mir zwar nicht zu Gebote; doch kann der Gedankengang des-

selben recht wohl aus Mairans Antwort entnommen werden, von welcher eine treffliche Übersetzung aus der Hand der Frau L. A. von Gottsched, der Gemahlin des bekannten J. C. Gottsched, existiert. Mairans Antwort enthält aber so wie die zweite Entgegnung der Marquise viel des Persönlichen, was hier füglich übergangen sein mag. Was die Sache selbst betrifft, scheint die Marquise Mairan den Vorwurf gemacht zu haben, er habe behauptet, ein Körper, der die Kraft besitze, 4 Federn zu schliessen, könne deren auch 6 schliessen, worauf letzterer erwidert, er habe gesagt: ein Körper, welcher vermöge einer empfangenen Geschwindigkeit und einer Kraft im stande sei, einen anderen Körper 2 Augenblicke zu bewegen, habe auch die Kraft, im ersten Momente 4, im nächsten 2, also im ganzen 6 Federn zu schliessen — was allerdings etwas anders lautet.

Man stelle sich zwei Körper M, N vor, welche durch Kräfte, die ihnen irgend ein Druck mitgeteilt habe, die Fähigkeit besitzen, senkrecht vom Horizont aus aufzusteigen und zwar M mit verzögerter Bewegung, N aber gleichförmig und zwar so, dass dessen Geschwindigkeit in jedem Momente der Geschwindigkeit, welche M am Anfange desselben Momentes hat, gleich ist. Dann werde, wenn M im ersten Momente 5, im nächsten 3 und im dritten 1 Rute zurücklege, N deren 6, 4 und 2, also im ganzen 12 durchlaufen. Es sei also keine Ungereimtheit, wenn man sage, der Körper müsse zuerst die Kraft gehabt haben, diese 12 Ruten nach diesem Gesetze zu durchlaufen. Mairan scheint damit einem Einwande der Marquise begegnen zu wollen, dahin lautend, dass man durch keine Hypothese eine verzögerte Bewegung in eine gleichförmige verwandeln könne; nichts sei ja gewöhnlicher und oft notwendiger, als eine solche Verwandlung, bemerkt Mairan, wenn man die Lehre von der Bewegung erklären oder verstehen wolle.

Die Marquise hat sich ferner offenbar auf den Seite 86 mitgeteilten Beweis Hermanns berufen. Mit diesem Beweise,

sagt aber Mairan, verhalte es sich gerade so, als ob jemand beweisen wollte, dass das Doppelte einer jeden Zahl ihrem Quadrate gleich sei und sich dabei auf die Zahl 2 stützte. Dieser Vorwurf gegen Hermanns Beweis ist aber in dieser Form zum mindesten ein Irrtum; denn Hermann hat, wie wir an oben erwähnter Stelle mitteilten, auch den Fall untersucht, in welchem der stossende Körper die Geschwindigkeit 3 besitzt. Doch wollen wir Mairan weiter hören! Um der vermeintlichen Zweideutigkeit, welche mit der Zahl 2 zusammenhängt, zu entgehen, nimmt er an, der stossende Körper A habe die Geschwindigkeit 4; dann werde B mit der Geschwindigkeit 2 sich nach dem Stosse bewegen, A aber mit der nämlichen Geschwindigkeit 2 zurückprallen und all seine Kraft dem Körper C mitteilen. Man hätte also vor dem Stosse die Kraft $4 \times 1$, nach demselben aber $3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$, wenn man mit den Gegnern der lebendigen Kräfte rechne; sonst aber müsste man die Kraft 16 haben — und beides sei unrichtig. Man könnte nach diesem Beispiele nur sagen, dass die Kräfte gleich der Summe der durch die doppelten Massen multiplizierten Geschwindigkeiten seien. Verändert man aber die Masse der ersten gestossenen Kugel, so werde man sehen, dass in der Natur nach dem Stosse bald mehr, bald weniger Kraft vorhanden sei als aus der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit vor dem Stosse vermehrten Masse herauskomme. (Man vergleiche hiemit den Wolfschen Beweis Seite 83.)

Die Marquise muss ferner, um dem oft erhobenen Einwurfe der Nichtgleichzeitigkeit der Bewegungen von vorneherein die Spitze zu brechen, ein anderes Beispiel erdacht oder sich wenigstens darauf berufen haben, nämlich eine Kugel, welche gleichzeitig und mit 2 Grad Geschwindigkeit 2 andere Kugeln stossen soll, deren Masse je gleich der doppelten Masse der stossenden Kugel ist; der Stoss soll unter einem Winkel von $60^0$ erfolgen, so dass jeder Kugel

eine Geschwindigkeit 1 und demnach eine Kraft 2 mitgeteilt wird, was zusammen 4 oder $2^2$ ausmacht, wobei die Zeit ausser acht bleibt. Mairan kann sich aber auch mit diesem Falle nicht einverstanden erklären; denn einmal sei der Anstoss hier nicht gleichzeitiger als dort; dann sei das Beispiel noch zufälliger als das vorige wegen des festgesetzten Winkels; ferner komme die Zeit ebenso gut dazu wie oben im Verhältnisse der Geschwindigkeiten unter dauernder Zusammendrückung und Wiederherstellung der elastischen Körper und endlich seien die Wirkungen so offenbar der Zerteilung der Kräfte überhaupt zuzuschreiben und gelten ceteris paribus ebenso von toten Kräften, so dass sie also für die lebendigen Kräfte keinen Beweis gäben.

In ihrer Erwiderung führt Frau von Chatelet gegen Mairans Theorie folgendes allerdings sehr gewagte Gleichnis an: Wenn Jemand 40000 Thaler besitze, um 4 Diamanten zu kaufen und er könne damit weitere 2 Diamanten, welche 20000 Thaler kosten, nicht kaufen, so werde es doch keinem Menschen einfallen, sein Vermögen nach den 2 nicht gekauften Diamanten zu schätzen. Was aber Mairans Einwurf gegen das Beispiel Hermanns betreffe, so werde die Kugel A, falls sie die Geschwindigkeit 4 besitze, der dreifachen Kugel B die Geschwindigkeit 2 geben, also ihre eine Kraft $3 \cdot 2^2 = 12$ mitteilen, selbst aber die Kraft $1 \cdot 2^2 = 4$ erhalten, was ja zusammen 16 mache, wie es die Theorie der lebendigen Kräfte verlange. Damit aber könne sie durchaus nicht einverstanden sein, dass er, um nach dem Stosse wieder die Geschwindigkeit 4 zu erhalten, die Kraft A wie eine negative Kraft betrachte, welche er nach allen Regeln der Algebra von der positiven Kraft B abziehe. Keiner von denen, welche die Kraft mit dem Quadrate der Geschwindigkeit messen, habe noch gesagt, dass sich die Kräfte nach dem Stosse wieder in gleicher Richtung finden müssten. Zur Verteidigung Hermanns fügt sie bei, dass dieser das erwähnte Bei-

spiel gerade deshalb gewählt habe, weil es der einzige Fall sei, in welchem sogar die Gegner der lebendigen Kräfte sich genötigt sähen zuzugeben, dass auch nach ihrer Rechnung die mitgeteilten Kräfte im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeiten stehen, weil nur die Einheit allein ihrem Quadrate gleich sei, — eine Behauptung, welche uns als sehr zweifelhaft erscheint. Wir meinen vielmehr, dass das Beispiel Hermanns als solches eine ganz hübsche Anwendung der Theorie der lebendigen Kräfte ist, aber als einen Beweis für dieselben werden wir es kaum auffassen können. Wie es aber mit der Auffassung Mairans steht, der die eine Kraft als negativ bezeichnet, darüber werden wir weiter unten hören. — Zur Verteidigung ihres eigenen Beispieles führt die Marquise aber weiter nichts an, als dass die Leibnitzianer einigen Grund hätten, wenn sie behaupten, dass zu einer vierfachen Wirkung eine vierfache Kraft gehöre, die Zeit sei, welche sie wolle und wenn sie auf den Einwurf, dass diese Wirkung die doppelte Zeit erfordere, Beispiele angeben, worinnen die vierfache Wirkung in der einfachen Zeit geschehe. — Wir werden später noch einmal kurz auf diesen Streit zurückkommen.

XXVII. Es dürfte nicht unpassend sein, an dieser Stelle Einiges aus den historischen Notizen der Akademie der Wissenschaften in Paris mitzuteilen, was sich in deren Annalen für die Jahre 1721 und 1728 findet. Der Autor derselben ist nicht angegeben; wahrscheinlich ist es der mehrfach erwähnte Ritter von Louville. Er meint auf Leibnitzens Theorie seien in anbetracht der Grösse des Mannes nur wenige Mathematiker eingegangen; nur Wolf habe „ungeachtet seines Wissens und vermutlich durch die grosse Autorität Leibnitzens verleitet“ diese Prinzipien angenommen. Der Chevalier de Louville glaubte aber einem entstandenen Übel widerstreiten zu müssen; sein Gedankengang sei folgender:

Es sei wahr, dass nach dem System Galileis ein Körper,

der in Folge seiner Schwere über eine Höhe herabfalle, am Ende seines Falles mit einer Geschwindigkeit in die Höhe gestossen werde, welche seiner Endgeschwindigkeit gleich sei und dass er auch in der nämlichen Zeit wieder zur nämlichen Höhe aufsteige. Und wenn man die beiden Zeiten in gleiche Teile teile, so durchlaufe er beim Aufsteigen in gleichen Zeitteilchen dieselben Wege nur in umgekehrter Ordnung. Wenn er also im Falle den Weg 1 in der ersten, 3 in der zweiten Sekunde durchlaufe, so durcheile er beim Aufstiege die Wege 3, 1; in beiden also durchlaufe er in einer Sekunde den Weg 1, in zweien 4; nach einer Sekunde habe er die Geschwindigkeit 1, nach zweien 2. Das sei also unbestritten; aber man müsse achthaben, dass der Körper, wenn er den Gesamtweg 1 durchlaufe, sich nur eine Sekunde und wenn er den Gesamtweg 4 durchlaufe, zwei Sekunden bewegen müsse. Mache man die verzögerte Bewegung, welche beim Aufstiege vorhanden sei, zu einer gleichförmigen, entgegengesetzt der beschleunigten beim Falle, so wisse man, dass der Gesamtbetrag, welcher bei einer gleichförmigen Bewegung durchlaufen werde, doppelt so gross sei wie die anderen; der Weg, welcher 1 war, werde 2 sein und der, welcher 4 war, 8; also werde der Körper, welcher mit der Geschwindigkeit 1 sich eine Minute bewegte, den Weg 2 durchlaufen und derjenige, welcher mit der Geschwindigkeit 2 in die Höhe geschleudert wurde, werde während der ersten Sekunde den Weg 4 durchlaufen und während der zweiten den nämlichen Weg. Wenn man also die beiden Bewegungen vergleiche, welche er während der ersten Minute durchlaufe, wenn er sich in dem einen oder anderen Falle bewege, so sehe man, dass sich die Wege verhalten wie die Geschwindigkeiten und dass folglich die Kräfte, welche sich bei gleichförmiger Bewegung wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege verhalten, sich auch wie die Geschwindigkeiten und nicht wie ihre Quadraten verhielten.

Um aus der verzögerten Bewegung eine gleichförmige zu machen, brauche man nichts zu ändern, was für die Frage von Wichtigkeit wäre; man habe sie im Gegenteile nur auf ihre richtigen Grenzen zurückgeführt, weil es sich ja eigentlich nur um eine einfache Kraft handle und um solche, welche einförmige Bewegungen hervorbringen könnten, nicht aber um beschleunigende oder verzögernde Kräfte wie die Schwere und andere. Wenn Leibnitzens System für einfache Kräfte nicht gelte, gelte es noch weniger für andere. Louvilles Entwicklung hat also grosse Ähnlichkeit mit der Mairans.

Die Kräfte, welche in die zusammengesetzten Bewegungen eintreten, seien sicher unter der Zahl der lebendigen Kräfte und Leibnitz habe für sie die ganz gewöhnliche Theorie zugelassen. Nun denke man sich einen gewichtslosen Körper, der frei in der Luft schwebe; auf ihn mögen von zwei verschiedenen Seiten aber in gleicher Richtung zwei gleiche Körper stossen; dann bewege sich der gestossene Körper gegen den Horizont. Nehme man nun an, dass jede von den vertikalen Komponenten die Hälfte der ursprünglichen Kraft sei, so werde sich der Körper mit einer Kraft nach abwärts bewegen, welche vor dem Stosse einer der beiden stossenden Körper hatte. Stosse nun gegen den gestossenen ein gleich grosser Körper mit der nämlichen Geschwindigkeit aber in entgegengesetzter Richtung, so trete Gleichgewicht ein. Das wäre aber nicht möglich, wenn sich die Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhielten; denn der gestossene Körper werde von zwei vertikalen Kräften gestossen, von welchen jede durch die Hälfte der Linie dargestellt werde, welche die Geschwindigkeit der beiden stossenden Körper darstelle; sie wären also nicht $^1/_2$ sondern $^1/_4$ jener Linie und ihre Summe nur $^1/_2$; die Geschwindigkeit des letzten Körpers sei aber 1; also würde der gestossene Körper nicht in Ruhe kommen, sondern mit der Geschwindigkeit $^1/_2$ in die Höhe steigen.

Das Argument des Herrn Louville ist aber nicht richtig; denn — alles Vorhergehende zugegeben — ist der Schluss nicht richtig, dass nach Leibnitzens Theorie die Diagonalkraft durch die Linie $^1/_2$ darzustellen sei; die vertikale Komponente der Geschwindigkeit eines jeden der stossenden Körper ist $^1/_2$; also ihre Summe $^1/_2 + {}^1/_2$ und demnach die Kraft $(^1/_2 + {}^1/_2)^2 = 1$ und nicht $(^1/_2)^2 + (^1/_2)^2$; die Diagonalkraft ist demnach durch die Linie 1 darzustellen und somit dieser Einwurf Louvilles hinfällig.

Übrigens begnügte sich die Akademie mit dieser scheinbaren Widerlegung Leibnitzens, bis die pag. 62 mitgeteilte Arbeit Bernoullis den Kampf von neuem und zwar in potenziertem Mafse entflammte. Der blosse Name Bernoulli, sagt der Historiker, hatte so viel Gewicht, die Frage der lebendigen Kräfte, an die man nicht mehr gedacht hatte, wieder in Fluss zu bringen. Als sich in der Akademie Widerspruch gegen Bernoullis Ansichten erhob, gab der Abbé Camus eine neue Theorie wesentlich anderer Art. (Siehe pag. 117.)

Louville hält an seiner Ansicht fest; auf Bernoullis pag. 71 angeführten Beweis erwidert er, dass in den Fällen, in welchen man gezwungen sei, Richtungen oder Bewegungen in Komponenten zu zerlegen, darauf nicht Rücksicht genommen zu werden brauche, dass die Komponenten nur eine der resultierenden Bewegung gleiche Summe geben müssten; sie seien immer und notwendig viel grösser. Die Resultante sei aus den Komponenten nicht wie aus integrierenden Bestandteilen zusammengesetzt; sie sei nur ein Resultat derjenigen Komponenten, welche eine gemeinsame Richtung annähmen, um miteinander Effekte hervorzubringen; aber nur das, was zur gemeinsamen Richtung beigetragen habe, sei geblieben, alles andere verloren gegangen; also dürfe man auch nicht annehmen, dass das, was in der Resultante geblieben sei, ein Mafs der Komponenten bilde.

Er stellte eine Regel auf, um die Summe all der Kräfte

zu finden, welche ein stossender Körper in gerader Richtung mehreren kleineren gleichen, denen er begegnet, mitteilt. Solange ihre Summe endlich sei, sei diese Kraft kleiner als die, welche der Körper vor dem Stosse hatte; je mehr Körper ihm begegneten, desto mehr würden die Kräfte einander gleich.

Nehme man an, der stossende Körper habe immer die Masse 4 aber nur die Geschwindigkeit 2, was die Kraft 8 gebe, so gebe die vorher erwähnte Regel nur 8 als Summe aller Kräfte; nehme man als Masse 4 und als Geschwindigkeit 4, so erhalte man als Summe der Kräfte 16. Diese Kräfte verhielten sich also wie $16 : 8 = 4 : 2$ und nicht wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Würden sich aber die lebendigen Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, so müsste sich dies am ersten bei direkten Stössen zeigen, weil sie einfacher seien als andere, woraus sich auch ergebe, dass man bei schiefen Bewegungen in Komponenten zerlegen müsse und dass dann die Summe der Komponenten viel grösser sei als die Resultante. — Zu bedauern ist nur, dass der Historiker die oben erwähnte Regel, nach welcher Louville die Kräfte berechnet, nicht angibt.

Louville finde ferner, dass mehrere Schlüsse, welche allgemein in der Mechanik angenommen würden, zerstört wären und sogar eines der Fundamente Bernoullis, in dessen Werke de monoeuvre des vaisseaux, wo sein neues System der lebendigen Kräfte statt haben sollte; das würde aber zu einer weitläufigen Auseinandersetzung führen und er begnüge sich deshalb, einen Einwurf physikalischer Natur zu erwähnen: Alle Experimente bewiesen, dass die Stösse von Flüssigkeiten gegen Flächen, welche man ihrem Laufe entgegenstelle, sich verhielten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten dieser Flüssigkeiten und Jedermann wisse, dass Flüssigkeiten aus sehr kleinen festen Teilchen zusammengesetzt seien, welche Zwischenräume hätten und sich unabhängig von einander

bewegten. Diese Teilchen hätten um so mehr Kraft, nicht bloss je schneller sie sich bewegten, sondern auch je rascher sich die Stösse folgten, d. h. je mehr Teilchen gleichzeitig eine Fläche träfen. Nun verhalten sich nach dem System der lebendigen Kräfte ihre Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten und noch dazu wie ihre Zahlen, die sich aus der einfachen Geschwindigkeit ergäben, also wie die Kuben der Geschwindigkeiten und nicht wie ihre Quadrate.

Aber dieser Einwand Louvilles scheint mir mit dem Leibnitzschen Maſse der Kräfte durchaus nicht im Widerspruche zu stehen. Wenn die Zahl der eine Fläche treffenden Teilchen der Geschwindigkeit der bewegten Flüssigkeitsmenge proportional ist, so ergibt sich daraus, dass die Masse auch der Geschwindigkeit proportional zu nehmen ist und die Kräfte werden in diesem Falle in der That dem Kubus der Geschwindigkeiten proportional gesetzt werden müssen. Aber abgesehen von der Hypothese, dass die Zahl der Teilchen der Geschwindigkeit proportional zu setzen sei, lässt sich bei bewegten Flüssigkeiten die Leibnitzsche Theorie mit der Annahme, dass die Kraft in diesem Falle dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, ganz gut vereinbaren. Die Teilchen, welche gleichzeitig eine zur Bewegungsrichtung der Flüssigkeit senkrechte Ebene treffen, haben notwendig die gleiche Geschwindigkeit v; sind also ihre Massen $m_1$ $m_2 \ldots m_n$ so sind ihre Kräfte $m_1 v^2$, $m_2 v^2 \ldots . m_n v^2$, also ihre ganze Kraft $(m_1 + m_2 \cdot - + m_n) v^2 = Mv^2$, wie es jene Theorie erfordert.

Der Historiker erwähnt ferner die bereits mitgeteilten Entwicklungen Mairans (siehe pag. 123) und fügt einige treffliche Erläuterungen bei, welche aber hier anzuführen uns der Raum nicht gestattet.

XXVIII. Im nämlichen Jahre erschien auch in den Philos. Transactions Nr. 401 a lettre from the rev. Dr. Samuel Clarke to Mr. Benjamin Hoadly concerning the pro-

portion of velocity and force in bodies in motion. Er meint, es sei kein Ding in der Welt so absurd, dass es nicht seinen Verteidiger finde; das könne man in allen Wissenschaften bestätigt finden; dass dies aber auch in der Mathematik stattfinden könne, jener Wissenschaft, welche ein reelles Wissen besitzend nur auf die Natur der Dinge begründet sei, das sei in der That wunderbar. So hätten Leibnitz und andere, um Staub aufzuwirbeln gegen Newtons Philosophie (!), ein Prinzip aufgestellt, das ganz und gar der notwendigen und wesentlichen Natur der Dinge widerspreche. Wir können aus diesen wenigen Worten die Stellung Clarkes hinreichend erkennen.

Er wolle nur das Unsinnige in diesem Prinzipe und den Grund des Irrtums dieser Männer zeigen. „In der Natur der Dinge muss jeder Effekt notwendigerweise der Ursache desselben proportional sein, d. h. der Aktion dieser Ursache oder der Anstrengung in der Zeit, in der der Effekt erzeugt wurde. Anzunehmen, dass ein Effekt dem Quadrate oder Kubus einer Ursache proportional sei, heisst annehmen, dass ein Effekt teils durch diesen Effekt entstehe, teils aus nichts. Die Kraft, welche von der Menge, der Masse und der Grösse der Geschwindigkeit abhängt, muss auch notwendig diesen beiden Ursachen proportional sein. Und deshalb muss in einem Körper die Kraft stets der Geschwindigkeit proportional sein. Wäre die Kraft dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so müsste der Teil derselben, welcher die Proportion der einfachen Geschwindigkeit übersteigt, entweder aus dem Nichts entnommen werden oder nach Leibnitzens Philosophie einer lebendigen Seele, welche jedem Teilchen der Materie zugehörte."

Ich kann mir hier die allerdings vorausgreifende Mitteilung nicht versagen, dass Kant, der ja eine endgiltige Lösung der Frage gegeben hat, in der That auf etwas Ähnliches hinauskommt, wenn er auch das Wort Seele nicht

anwendet. Doch wir lesen weiter bei Clarke: „Wenn ein Effekt dem Quadrate einer Ursache proportional ist, so kommt dies immer davon, dass entweder zwei Ursachen gleichzeitig wirken oder davon, dass ein und dieselbe Ursache doppelte Zeit währt. So ist der Widerstand, welchen ein Körper in einem flüssigen Medium erfährt proportional dem Quadrate der Bewegung; die Intensität des Lichtes nimmt ab mit dem Quadrate der Entfernung. Ein und dieselbe Kraft veranlasst einen Körper in zwei Zeitteilen den nämlichen Weg zu beschreiben, wie die doppelte Kraft in einem Zeitteile. Der durchlaufene Weg ist also nicht wie die Kraft, sondern wie Kraft und Zeit miteinander. Und in Räumen, in welchen der Bewegung ein gleichförmiger Widerstand geleistet wird, muss notwendigerweise der durchlaufene Weg auch wie Zeit und Kraft sein; also ist in diesen Fällen der durchlaufene Raum, bevor die Bewegung aufhört, notwendig wie das Quadrat der Kraft. Das gilt auch bei beschleunigter Bewegung. Aber Geschwindigkeit und Kraft sind in diesen Fällen das nämliche, so dass also behaupten, die Kraft sei dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, nichts anderes heisst als behaupten, die Kraft sei ihrem eigenen Quadrate gleich. —

Wir wollen nun den Grund des Irrtums darlegen.

Der Effekt einer Kraft, welche einem Beweglichen mitgeteilt wird, ist die Bewegung desselben von einem Platze zum anderen. Weil aber der Effekt seiner Ursache proportional sein muss, so behauptet Leibnitz, der im Falle durchlaufene Raum sei der Kraft proportional, welche ihn antreibt; da sich aber dieser wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte, so gelte das auch von der Kraft. Aber es ist klar, meint Clarke, dass eben der Weg nicht bloss von der Kraft, sondern auch von der Zeit abhänge, d. h. also vom Quadrate der Kraft. Also sind nicht Kraft und Quadrat der Geschwindigkeit, sondern Kraft und einfache Ge-

schwindigkeit gleich. Wenn zwei ungleiche Körper an den Enden der ungleich langen Arme eines Hebels sich Gleichgewicht halten und in gleichen Zeiten schwingen, so kommt dies daher, dass diese Arme am selben Hebel sich befinden, wie in einer Bemerkung Leibnitzens mit grossem Nachdrucke zu lesen ist; in diesem Falle sind die Kräfte allerdings wie die Wege; aber deshalb noch nicht wie Quadrate der Geschwindigkeiten. Denn die Geschwindigkeiten verhalten sich hier selbst wie die Wege, weil die Zeit dieselbe ist. Wenn ein Körper mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit in weichen Lehm oder in einen Haufen elastischer Körperchen eindringt, dann gilt diese Proportion, nicht weil die Kraft mehr als der Geschwindigkeit proportional ist, sondern weil die beim Falle erreichte Tiefe teils von der Kraft oder Geschwindigkeit, teils von der Zeit abhängt. Wie steht es nun beim Stosse fester Körper? Experimente sollen zeigen — was ganz absurd ist — dass die Kraft in dem ruhenden Ball, diese tote Kraft (welche diese Herren phantastisch lebendige Kraft nennen, fügt Clarke bei!) dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Balles gleich sei. Da kann man diese Kraft ebenso gut dem Kubus oder einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit des bewegten Balles gleich setzen; das heisst die Natur der Dinge ins Lächerliche wenden.

Leibnitz hat in einem Briefe, den er nach England schrieb, zu verstehen gegeben, dass er Aussicht habe auf eine perpetuierliche Bewegung, welche sich auf die Kenntnis eines lebendigen Prinzipes oder einer aktiven Fähigkeit in der Materie gründe. Aber nach den nun erwähnten Experimenten ist es klar, dass die Kraft bewegter Körper bis zu unendlichen Potenzen der Geschwindigkeit steigen kann. Wenn man aber die Erscheinungen in der Natur mit Rücksicht auf Wirkung und Gegenwirkung erklären will, so muss diese Kraft notwendigerweise gerade so sein, wie die ruhender Körper; es gibt sonst keinen Effekt.“

Man kann gerade nicht sagen, dass der Brief sine ira et studio geschrieben sei; es scheint wahr zu sein, was Joh. Bernoulli meint, jener Streit wäre eher zu Ende gekommen, wenn er nicht zu einem Nationalitätsstreite geworden wäre. Der Brief stellt eben auch in seiner allzu pathetischen Form Behauptungen auf, die erst zu beweisen wären. Wer kann denn sagen, dass Kräfte, weil sie von der Geschwindigkeit abhängen, ihrer ersten Potenz proportional sein müssen? Auch scheint mir der Beweis, dass Kraft und Geschwindigkeit dasselbe seien, durchaus nicht überzeugend zu sein. Das Schreiben zeigt uns so recht, wie sehr die Newtonianer jedem neuen System feindselig entgegentraten. —

## Fünfter Abschnitt.

XXIX. Ein eifriger Verteidiger des neuen Maſses ist G. F. Richter in seiner in den Act. erud. 1729 veröffentlichten Abhandlung de aestimandis viribus corporum juxta quadratum celeritatum.

Wenn ein völlig elastischer Körper a auf einen ebenso elastischen in Ruhe befindlichen Körper A stosse, so dass beide nach dem Stosse mit gleicher Geschwindigkeit aber in entgegengesetzter Richtung sich bewegen, so könne man mit Hilfe der Methode Bernoullis das Verhältnis der Kräfte und Geschwindigkeiten bestimmen. Wenn nun $A = 3a$ sei und a stosse mit beliebiger Geschwindigkeit gegen A, werde letzterer mit derselben Geschwindigkeit zurückgestossen, A aber bewege sich mit der vorigen Geschwindigkeit des a in dessen Richtung fort; also müssten sich die Kräfte wie die Massen verhalten. a habe von der ursprünglichen Geschwindigkeit noch die Hälfte, von seiner Kraft aber nur mehr den vierten Teil, d. h. die Kräfte verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Aber diese, sowie der Bernoullianische Beweis habe die Schattenseite, dass er nur von

einem speziellen Falle gelte; es sei ihm nun gelungen, einen allgemeinen Beweis zu liefern. Die Hypothese sei für die richtige zu halten, nach welcher die Summe der Kräfte vor und nach dem Stosse dieselbe sei. Wenn nun zwei beliebige Körper mit beliebigen Geschwindigkeiten $AD = V$ und $aD = u$ in D zusammenstossen und C sei der gemeinsame Schwerpunkt beider Körper und man nenne den Körper a, zu welchem hin sich der Schwerpunkt bewege, den anderen aber A, und setze $CD = p$, so sei $AC = \frac{a \cdot V + a \cdot u}{A + a}$; $aC = \frac{AV + Au}{A + a}$; $CD = AD - AC = aC - aD = V - \frac{aV + au}{A + a}$ $= \frac{Av + Au}{A + a} - u = \frac{AV - au}{A + a}$.

Nach Leibnitz sei nun die Summe der Kräfte vor dem Stosse $AV^2 + au^2$ und nach demselben $A(V - 2p)^2 + a(u + 2p)^2 = AV^2 + au^2$, weil nach Obigem $4\,aup + 4\,ap^2 = 4\,AVp + 4\,Ap^2$; nach Cartesius aber sei die Summe der Kräfte vor dem Stosse $AV + au$ und nach demselben $AV + au - 2\,Ap + 2\,ap$, also nicht dieselbe wie vorher, wenn nicht zufällig $A = a$. Dasselbe gelte natürlich auch dann, wenn die Körper in gleicher Richtung liefen. Wolle man denselben Kalkul auch auf nicht elastische Körper anwenden, so müsse man zur Summe der nach dem Stosse vorhandenen Kräfte noch die beim Stosse selbst vernichteten Kräfte addieren; denn darin unterschieden sich die elastischen Körper von den nicht elastischen, dass bei letzteren in Folge des Stosses ein Teil der Kraft und der Bewegung vernichtet werde, wenn auch Leibnitz anderer Ansicht gewesen sei, nämlich diejenigen Kräfte, welche nicht elastische Körper in Folge der Aktion und Reaktion aufwenden und welche man relative Kräfte nennen sollte. Es sei aber nicht schwer, die Grösse dieser Kräfte zu messen, wenn man bedenke, dass sie immer dieselben blieben, welches auch die absoluten Kräfte

seien, so lange die Massen und die relativen Geschwindigkeiten, welche die Gerade Aa bezeichnen, sich nicht änderten. Wenn nämlich die nicht elastischen Körper A und a mit den Geschwindigkeiten AC und aC im Schwerpunkte C selbst zusammenträfen, so sei nach dem Stosse alle Kraft und Bewegung verschwunden und deshalb in diesem Falle relative und absolute Kräfte gleich. Wo also auch die beiden Körper sich träfen, ihre relativen Kräfte seien immer gleich den absoluten Kräften beim Zusammenstosse im Schwerpunkte. Also nach Leibnitz die Kräfte vor dem Stosse $AV^2 + au^2$ und nach demselben $Ap^2 + ap^2$; die absorbierten relativen Kräfte aber $A(V - p)^2 + a(u + p)^2$; also die Summe der nach dem Stosse noch vorhandenen und der während desselben vernichteten Kräfte wieder $AV^2 + au^2$, was nach dem anderen Maſse nicht der Fall sei.

Ein anderer Beweis stützt sich auf die Theorie der Maxima und Minima. In jedem anderen Punkte als in C sei die Summe der absoluten Kräfte grösser als die der relativen; also müsse $A \cdot AC^2 + a \cdot aC^2$ unter allen Grössen $A \cdot AD^2 + a \cdot AD^2$ ein Minimum sein, was auch in der That der Fall sei; nicht aber müsse $A \cdot AC + a \cdot aC$ die kleinste von den Grössen $A \cdot AD + a \cdot aD$ sein, ein Umstand, der auch für das Maſs Leibnitzens spreche.

Es sei auch noch zu bemerken, dass bei nicht elastischen Körpern, nicht wenn die direkt entgegengesetzten Kräfte gleich seien, sondern wenn sie sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, oder wenn die Summe der relativen Kräfte der der absoluten gleich sei, jene Kräfte sich wechselweise erhalten und verzehren und dass ferner Aktion und Reaktion nur dann gleich sei, wenn es auch die Massen seien; denn das Verhältnis derselben an A sei $A \cdot AC^2 : a \cdot aC^2 = a \cdot (V + u)^2 : A(V + u)^2 = a : A$. Das scheine ein gewaltiges Paradoxon zu sein; aber Vernunft und Erfahrung sprächen dafür. Freilich gelte dies nur von frei und im

leeren Raume beweglichen Körpern. — Soweit hier; wir werden unten mehr von Richter hören, dessen Arbeiten ohne Zweifel den Stempel der Gediegenheit tragen.

XXX. Auch in Italien hatte die Frage nach dem Maſse der lebendigen Kräfte bereits das Interesse der Gelehrten wach gerufen. Wir finden im ersten Bande der Commentarii soc. Bonon. eine Abhandlung, in welcher Jakob Riccatus mit Hilfe der Akustik die Berechtigung des Leibnitzschen Maſses zu beweisen sucht, indem er aus derselben die Gesetze elastischer Körper abzuleiten sucht. Er entwickelt und begründet eine Reihe von Voraussetzungen, von denen ich aber nur das Nötigste hier mitteilen will. Wenn zwei Körper über ähnliche Kurven herabgleiten und zwar durch beschleunigende Kräfte bewegt, welche durch die Ordinaten dieser Kurven dargestellt werden, so verhalten sich die Zeiten, während deren ähnliche Teile durchlaufen werden, wie die Quadratwurzeln aus den Massen. Sind aber die Kurven nicht ähnlich, sondern derart, dass die gleichen Abscissen entsprechenden Ordinaten in konstantem Verhältnisse stehen, dann verhalten sich die Zeiten, in welchen gleiche Wege zurückgelegt werden, direkt wie die Wurzeln aus den Maſsen, indirekt wie die aus den bewegenden Kräften. Sind endlich die den gleichen Ordinaten entsprechenden Abscissen in konstantem Verhältnisse, dann verhalten sich jene Zeiten wie die Wurzeln aus Massen und Wegen. — Ferner: Wenn zwei Saiten von gleichen Gewichten gespannt und von gleichen Schlägen getroffen werden, so verhalten sich ihre Schwingungsdauern wie ihre Längen und falls sie an dem einen Ende befestigt sind, verhalten sich auch ihre Ausdehnungen wie die Längen; also müssen auch die Kräfte, welche die Spannung hervorbringen, diesen Längen proportional sein. Auf Grund dieser Voraussetzungen zeigt dann Riccatus, dass die Kräfte eines Körpers sich nicht wie dessen Geschwindigkeiten verhalten können.

An den Saiten AB, ab, welche als Abscissen genommen werden, seien die gleichen Kräfte FK, fk angebracht; sie mögen sich bis nach F, f ausdehnen, wo die Widerstände der Saiten den Gewichten gleich seien, was dann eintritt, wenn die letzten Ordinaten der Kurven BK, bk, nämlich FK, fk sich und den Gewichten gleich sind und die Abscissen sich wie die Längen AB, ab verhalten. Bewegen sich nun zwei Gewichte, deren Grösse durch die Ordinaten BX, bx dargestellt sei, in Folge der Schwere frei längs BF, bf, so verhalten sich die Geschwindigkeiten in F und f wie die Wurzeln aus den zurückgelegten Wegen oder aus den Rechtecken XF, xf. Sind aber dieselben Gewichte an den Saiten befestigt und sinken nun denselben Weg herab, so werden die beschleunigenden Kräfte in analogen Punkten gleich sein, weil sie ja von der konstanten Kraft BX abhängen und den gleichen Widerständen der Saiten. Deshalb stellen die Kurven BK, bk die Reihe der Kräfte dar, welche auf die Gewichte wirken und die Geschwindigkeiten in F, f verhalten sich wie die Wurzeln aus den Flächen BKX und bkx also wie die Wurzeln aus den Abscissen KX, kx oder BF, bf.

Die Kräfte BX und bx äussern ihre Wirkung teils in der Dehnung der Saiten, teils in der Beschleunigung der fallenden Gewichte; aber eine derartige Schwerkraft könnte, wenn sie nicht behindert würde, Geschwindigkeiten erzeugen, welche sich wie die Wurzeln aus den durchlaufenen Wegen verhalten (siehe oben) und falls sie durch die Festigkeit der Saiten aufgehalten wird, erzeugt sie Geschwindigkeiten, welche im nämlichen Verhältnisse stehen. Wäre es also möglich, dass die lebendigen Kräfte sich verhalten wie die einfachen Geschwindigkeiten, so ergäbe sich, dass die Kräfte, welche auf die Ausdehnung der Saiten werwendet werden, sich wie die Wurzeln aus den Abscissen BF, bf oder aus den Längen AB, ab verhalten, was nicht möglich ist, weil sich die spannenden Kräfte wie die Spannungen verhalten müssen,

d. h. wie BF : bf. — Dieselbe Unmöglichkeit ergibt sich bei jeder anderen als eben der zweiten Potenz der Geschwindigkeit; also kann sie allein die richtige sein. — Auf die Zeit aber ist hiebei gar keine Rücksicht zu nehmen; denn da eine Saite in Folge der Spannung länger wird, so ändert sich ihr Widerstand nicht, wie auch die Zeit der Ausdehnung sein mag; die Überwindung des nämlichen Widerstandes erfordert unter allen Umständen die nämliche Kraft.

XXXI. Einen kurzen Beweis für die Richtigkeit des neuen Mafses der lebendigen Kräfte hat Fried. Wilh. Stübner in den Act. erud. 1734 geliefert. Die Kräfte V, v erzeugen in den Zeiten D, d die Wirkungen E, e. Ist $D = d$, so ist $V : v = E : e$. Wenn $V = v$, so ist $D : d = E : e$. Endlich ist $V : v = E \cdot d : e \cdot D$; denn wenn V in der Zeit D die Wirkung E erzeugt, so wird v in derselben Zeit die Wirkung $\frac{Ev}{V}$ hervorbringen und in der Zeit d den Effekt $\frac{Evd}{D}$; also $e = \frac{Evd}{D}$; oder $Edv = eDV$. Die Wirkungen der Kräfte V und v, welche die Körper M und m mit den Geschwindigkeiten C, c bewegen, sind die Bewegungen, welche durch jene Kräfte in den Körpern entstehen; nennt man also diese Bewegungen L, l, so ist $L : l = E : e$. Die Bewegungsgrössen sind den Bewegungen der bewegten Körper proportional; also $L : l = MC : mc$. Eine Kraft wirkt um so wuchtiger, je weniger Zeit sie braucht, eine Wirkung zu erzeugen; nennt man also die Wucht R, r, so ist $R : r = d : D$. Je wuchtiger und schneller eine Bewegung von einer Kraft erzeugt wird, desto wuchtiger wirkt diese Kraft; d. h. $R : r = C : c = d : D$; d. h. die Zeiten, während welcher die Kräfte wirken, sind reciprok zu den Geschwindigkeiten der Körper $D : d = c : C$. Die bewegenden Kräfte sind demnach proportional den erzeugten Geschwindigkeiten und den

Bewegungen der Körper; denn $V : v = \frac{E}{e} \cdot \frac{d}{D} = \frac{E}{e} \cdot \frac{C}{c}$ $= \frac{CM}{cm} \cdot \frac{C}{c} = \frac{MC^2}{mc^2}$; q · e · d. Der Beweis ist formell sehr schön und jedenfalls richtig, sobald gezeigt werden kann, dass seine Voraussetzungen richtig sind. — Einen kürzeren und wie er selbst sagt, allgemeineren Beweis gab Stübner im nächstfolgenden Jahre (Act. erud. 1738 Suppl.) bekannt. Wenn die Kräfte F, f in den Zeiten T, t, bei gleichförmiger oder ungleichförmiger Wirkung in gleichen Körpern die Geschwindigkeiten V, v erzeugen, so ist $F : f = \frac{dV}{dT} : \frac{dv}{dt}$ $= \frac{dV}{dv} \cdot \frac{dt}{dT}$; aber $dV : dv = dt : dT$ und demnach $F : f$ $= dV^2 : dv^2 = V^2 : v^2$.

Dieser letztere Beweis ist um deswillen bemerkenswert, weil er das Urbild all der Beweise für das Mafs der lebendigen Kräfte ist, die wir in den modernen Lehrbüchern der Mechanik vorfinden; wie erwähnt ist er einfach und hübsch und heutzutage, nachdem die Richtigkeit seiner Voraussetzungen zweifellos geworden, auch ohne Bedenken anzunehmen.

Noch eine andere Abhandlung Stübners über die Kraft der bewegenden Kräfte bei verzögerter Bewegung (A. e. 1734) darf hier nicht übergangen werden. Wie auch sonst die Ansichten über das Mafs der Kräfte auseinandergehen mögen, darin stimmen alle überein, dass bei gleichen Geschwindigkeiten die Kräfte sich wie die Körper selbst verhalten. Wäre man also im stande das Mafs der Kräfte bei verzögerter Bewegung auf diese Art von Kräften zurückzuführen, so liesse sich eine Lösung der Frage um das erstere Mafs erwarten. Man kann dies nun, meint Stübner, auf folgende Art bewirken: Man denke sich 4 gleiche in gleichförmig verzögerter Bewegung befindliche Körper A, B, C, D, so

dass sie im ersten Zeitteilchen $dt$ den Weg $7ds$, im zweiten $5ds$, dann $3ds$ und im vierten $ds$ zurücklegen; die Körper seien unelastisch. Um A im ersten Zeitteilchen zur Ruhe zu bringen, genügt ein Körper $7A$ mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$; dem Körper B begegne im zweiten Zeitteilchen der Körper $5B$ mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ so wird dieser aufgehalten werden u. s. f. Aber wenn auch den Körpern kein Hindernis entgegenstünde, würde die ganze Bewegung nach der Zeit $4dt$ erschöpft sein. Also werden die Körper $7A$, $5B$, $3C$ und D mit der gleichen Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ die nämliche Bewegung verrichten, wie das, was bei gleichförmig verzögerter Bewegung die Kraft gleichmässig aufhebt; d. h. das Aggregat dieser Kräfte ist der Summe der Körper $7A + 5B + 3C + D = 16A$ proportional. Den Wegen und nicht den Zeiten sind also die Kräfte bei verzögerter Bewegung proportional. Denn würde man annehmen, die Kraft des A sei am Anfange des ersten Zeitteilchens

$$A\,\frac{7ds + 5ds + 3ds + ds}{4dt} = 4A \cdot \frac{ds}{dt},$$

so ergäbe sich, dass der Körper $4A$ mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ die Bewegung des A dann aufheben könnte, wenn dessen Geschwindigkeit noch nicht vermindert wäre; das ist aber nicht möglich, weil der Stoss von $4A\,\frac{ds}{dt}$ nicht dem von $A \cdot \frac{7ds}{dt}$ gleich sein kann; also kann die Kraft von A nicht $A\,\frac{4ds}{dt}$ sein. Vier Körper, welche also gegen 4 gleich grosse Körper stossen, absorbieren all die Elementarbewegungen,

welche in einem einzigen Körper ohne Hindernis nur durch die verzögernde Kraft absorbiert würden. —

XXXII. Im Jahre 1735 erschien in den Act. erud. Lips. eine neue Arbeit Joh. Bernoullis, de vera notione virium vivarum eorumque usu in dynamicis, die ohne Zweifel sehr viel zur Klärung der Ideen und zum siegreichen Vordringen des neuen Maſses beigetragen hat. Das Wichtigste aus derselben möge hier mitgeteilt werden.

Die lebendige Kraft besteht nicht in einem aktuellen Wirken, sondern in der Fähigkeit zu wirken; sie ist vorhanden, wenn sie auch nicht wirkt; eine gespannte Feder z. B. hat in sich die Fähigkeit zu wirken, wenn sie auch ausser sich nichts findet, worauf sie ihre Kraft übertragen könnte. So lange sie gespannt ist, kann man nicht sagen, sie wirke; so wirkt auch ein bewegter Körper an sich noch nicht, weil keine Änderung seines Zustandes eintritt; er behält alle Kraft in sich, bis er auf einen anderen Körper stösst.

Daraus ergibt sich, dass lebendige Kraft etwas Reelles, Substanzielles ist, das für sich existiert und, so weit es für sich existiert, von nichts anderem abhängt. Daraus schliessen wir auch, dass jede lebendige Kraft eine ganz bestimmte Grösse hat, von der nichts verloren gehen kann, was sich nicht in einem Effekte wieder ergeben würde. Daraus ergibt sich auch, dass die lebendige Kraft fortwährend erhalten bleiben muss.

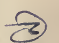
Tote Kraft ist nichts Anderes als eine Anregung, durch welche ein Körper zu einer Beschleunigung oder Verzögerung gedrängt wird. Aber zwischen lebendiger und toter Kraft ist ein grosser Unterschied; letztere ist nur etwas Relatives, welches zwei von ihr völlig verschiedene Dinge voraussetzt, nämlich eine Ursache, welche einen Druck ausübt und ein Ding, das den Druck empfängt.

Die Gegner bringen deswegen die beiden Arten von Kräften durcheinander, weil sie sehen, dass aus freier Wirkung

einer toten Kraft in einem Körper lebendige Kraft erzeugt werden kann, wenn nämlich der Körper von der toten Kraft gedrängt dem Drucke nachgibt und keinen anderen Widerstand leistet als den seiner Trägheit.

Ein Körper, welcher durch eine Feder so lange in Bewegung gesetzt wird, bis diese sich nicht mehr weiter ausdehnen kann, erhält die ganze lebendige Kraft derselben. Drückt eine Feder gegen mehrere Körper, so muss sich ihre lebendige Kraft in all den Körpern miteinander wiederfinden, so dass die Summe der lebendigen Kräfte der letzteren gleich der lebendigen Kraft der Feder ist.

Die Bewegung in einem Körper kann als die Wirkung irgend eines Agens angesehen werden, das all seine Kraft durch die Wirkung des Körpers aufzehrt. Wenn also elastische Körper aufeinander stossen, so ändern sich ihre Geschwindigkeiten so, dass die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse gleich sind.

Diejenigen, welche die Theorie der lebendigen Kräfte zurückweisen, stützen sich darauf, dass beim Maſse derselben auf die Zeit keine Rücksicht genommen ist. Aber es ist lächerlich, die Grösse einer Sache, welche an und für sich existiert, anders zu messen, als durch das bestimmte Maſs 
und es ist von keinem Belange, in welcher Zeit jene Messung vollendet wird, noch auch welches Maſs angewendet wird, ob grösser oder kleiner. Das ist gerade so, als wollte man sich bei der Frage, wie viel Wasser ein Krug fasst, darum kümmern, welche Zeit zu seiner Füllung nötig ist.

Denkt man sich 4 gleiche, gleich gespannte Federn, so repräsentieren sie ohne Zweifel die vierfache Kraft der einzelnen Feder und jede von ihnen nimmt zu einem Vierteile an dem Effekte teil.

Man kann auf verschiedene Arten und in verschiedenen Zeiten den nämlichen Effekt erzeugen; man kann nämlich

die 4 Federn in eine gerade Linie stellen, oder paarweise zusammenfassen, oder alle vier neben einander anbringen.

Lässt man nun die Federn los und gegen den Körper wirken, so werden sie diesen bewegen und es ist gar kein Zweifel, dass die lebendige Kraft in allen drei Fällen die nämliche ist, weil ja jeder von den Körpern den Effekt der 4 Federn in sich aufnimmt. Also können gleiche und gleich gespannte Federn als Mafs der lebendigen Kräfte aufgefasst werden, vorausgesetzt sie sind gewichtslos.

Die Geschwindigkeiten, welche der Körper in diesen drei Fällen erreicht, sind notwendig einander gleich, weil sowohl der Körper der gleiche ist als auch die Kraft, welche von der gleichen Zahl von Federn mitgeteilt wird. Aber die Zeiten, in welchen jene Geschwindigkeiten erreicht werden, sind unmöglich einander gleich, sie verhalten sich vielmehr wie 4 : 2 : 1. Das lässt sich mit Hilfe der allgemeinen Prinzipien der Mechanik beweisen, welche auch von den Gegnern anerkannt werden.

Es sind auch die Drucke ungleich, mit welchen der Körper bewegt wird; sie verhalten sich nämlich wie 1 : 2 : 4; denn der Körper wird im ersten Falle nicht anders gedrückt als ein anderer Körper, der von einer einzigen Feder gedrückt wird, von der er allein seine lebendige Kraft erhält, welche also nur den vierten Teil von dem ausmacht, was er von 4 Federn erhält; das ergibt sich aus dem Obigen. Da also die Verschiedenheit der Zeiten und der Drucke kein Hindernis bieten, so erlangt der Körper in allen drei Fällen die nämliche lebendige Kraft und also auch die nämliche Geschwindigkeit. Es ist also ganz gleichgiltig, wie die lebendige Kraft auf den Körper übergegangen ist; man muss nur darauf achthaben, wie viele Federn von gegebener Spannung vorhanden sind. Die Kraft einer Feder ist etwas Reelles, was solange bleibt, als die Feder durch ein Band gehalten ist; aber die Art, die Feder zu öffnen und die Zeit, welche

hiezu nötig ist, sind bloss etwas Accidentielles. Die lebendige Kraft, welche in einem Körper erzeugt wurde, geht nicht unter, sondern bleibt, bis sie auf etwas anderes übertragen wird. Man muss also bei allen Bewegungen, bei welchen Kraft nicht verloren gehen kann ohne gleichen Effekt, die Erhaltung der lebendigen Kraft als Fundamentalsatz annehmen.

Merkwürdig ist folgende Stelle in der Arbeit Bernoullis, aus welcher hervorgeht, dass der Kampf zwischen Leibnitzianern und Cartesianern einen gewissen nationalen Anstrich bekam. Huyghens habe noch unbewusst der Natur und der Erhaltung der lebendigen Kraft das Prinzip vom gleichen Auf- und Abstiege des gemeinsamen Schwerpunktes eines Systemes von Körpern gleichsam als Axiom angenommen, um das Oscillationscentrum bei zusammengesetzten Pendeln zu bestimmen. Und wer weiss, fügt er bei, ob, wenn Newton dieses Prinzip erfunden hätte, nicht sofort ganz Britannien ihm zugestimmt hätte!

Hätte Newton die Natur der lebendigen Kräfte gekannt, er hätte sicherlich nicht zwei Prinzipien aufgestellt, das eine zur Bewegung der Körper und das andere zur Erhaltung ihrer Bewegung. Das nämliche Prinzip, welches Bewegungen mitteilt, erhält sie auch, nicht in der Grösse der Bewegung, sondern in der der Kraft, woraus deutlich hervorgeht, dass die Bewegung in der Natur nie untergehen kann, wie Newton gefürchtet zu haben scheint.

Von vielen, besonders von Huyghens (de vi percussionis) war bemerkt worden, dass die Bewegungsgrösse bis ins Unendliche vermehrt und vermindert werden kann, aber keinem fiel es ein ausser Newton, dass man daraus die Konsequenz ziehen müsse, dass deshalb die Bewegungsgrösse überhaupt vernichtet werden könne. Und doch hätte Newton gerade deshalb schliessen müssen, dass die Grösse der Kraft nicht in der Bewegungsgrösse bestehen könne, da sie ja völlig konstant und keiner Änderung unterworfen ist, was man mit

einem Beispiele Newtons selbst hätte beweisen können, dass zwei Kugeln, welche durch ein feines Band verbunden sich um einander drehen, während der gemeinsame Schwerpunkt auf einer Geraden fortrückt, immer dieselbe Grösse an lebendiger Kraft besitzen; wenn man nämlich beide Kugeln nicht mit der einfachen Geschwindigkeit, sondern mit dem Quadrate derselben multipliziert, so ist dieses Produkt konstant.

Daran knüpft Bernoulli einige Probleme, welche sowohl mit Hilfe der Theorie der lebendigen Kräfte, als auch auf anderem Wege bewiesen werden und so die Richtigkeit jener Theorie beweisen.

XXXIII. Im nämlichen Jahre (1735) finden wir in den Act. erud. unter mehreren dissertationes physico-mathematicae von dem Engländer Jakob Jurin, der uns in der Geschichte dieses Streites noch mehrfach begegnen wird, eine über die bewegende Kraft, in welcher das alte Maſs gegen Leibnitzens Theorie verteidigt wird, von welch letzterer er meint, sie sei durch einen kleinen Irrtum entstanden und durch den Streit zum Teil wohl auch mit Absicht weiter verbreitet worden. Er schickt folgende Behauptungen voraus: 1) Wenn irgend einem Körper, welcher eine beliebige bewegende Kraft besitzt, eine gleich grosse Kraft mitgeteilt wird, so hat er die doppelte bewegende Kraft. 2) Die gesamte bewegende Kraft mehrerer Körper, welche die gleiche bewegende Kraft besitzen, ist gleich der Summe dieser Kräfte. 3) Durch einen gegebenen Druck wird in gegebener Zeit eine gegebene bewegende Kraft erzeugt. Er schliesst dies daraus, dass $1 + 1 = 2$ und dass die Effekte gleicher Ursachen gleich seien. Daran schliesst sich sein Beweis, dass die bewegenden Kräfte den Geschwindigkeiten proportional seien. Ein horizontaler Tisch ruhe so auf Rädchen, dass er in der Richtung seiner Länge hin- und zurückgeschoben werden könne; in irgend einem Punkte B desselben sei die Feder CBD befestigt. Das eine Ende C derselben werde bis nach D zurückgezogen und

treibe, indem man sie springen lasse einen Körper A parallel zur Länge des Tisches nach E; die Geschwindigkeit des Körpers A bei dieser Bewegung sei bekannt. Nun bringe man A an seine frühere Stelle, lasse die Feder in Ruhe und bewege dafür den Tisch mit derselben Schnelligkeit, welche vorhin A hatte in der Richtung AE. Dann werde A, welches nun auf dem Tische in Ruhe bleibe, dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe bewegende Kraft erhalten wie vorhin. Lasse man aber gleichzeitig den Tisch in der eben erwähnten Weise sich bewegen und die Feder springen, so erhalte A die doppelte bewegende Kraft und da auch die Geschwindigkeit die doppelte sei, so folge, dass Kraft und Geschwindigkeit im gleichen Verhältnisse stünden. Nach Leibnitz aber müsste die Feder dem Körper während der Bewegung des Tisches die dreifache Geschwindigkeit mitteilen. — Noch einen anderen Beweis fügt er bei: Wenn man auf eine Ebene Wasser fallen lasse, so sei der Druck desselben auf jener Ebene dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, wie Mariott gezeigt habe; aber die Kraft jenes Druckes verhalte sich wie die gesamte bewegende Kraft aller Wasserteilchen, die in unendlich kleiner Zeit auf die Ebene fallen. Wenn man also das Quadrat jener Geschwindigkeit mit der Zahl der Wasserteilchen, d. h. mit der Geschwindigkeit dividiere, so ergäbe sich die bewegende Kraft eines jeden Wasserteilchens gleich der Geschwindigkeit des Wassers. (Siehe Seite 148.)

In derselben Abhandlung bekämpft Jurin auch den Beweis für das Mafs der lebendigen Kräfte, welchen Bülffinger gegeben hatte (s. S. 98.). Wenn nämlich auch zwei Kräfte sich weder verstärkten noch schwächten, so lange sie ihre eigenen Richtungen einhielten, so könnten sie sich doch, wenn sie gleichzeitig wirkend einen Körper in einer Diagonale bewegten, sich schwächen, weil eine der anderen teilweisen Widerstand leiste. Denn wenn man die Kraft AB in die beiden Kräfte AE und EB auflöse und die darauf

normale AC in AF und CF, so dass AE und AF in eine Gerade fielen, EB und CF aber auf dieser senkrecht ständen, so müssten sich die gleichen Kräfte EB und CF vernichten, AD = AE + AF sein. An demselben Widerspruche leide auch der Bernoullische Beweis, der sich auf Federn stützt. Polens Experimente aber gibt er zu, weil die Zeiten, in welchen die Grübchen von den fallenden Kugeln erzeugt werden, ungleich seien.

Noch im nämlichen Jahre wurden Jurins Ausführungen von jenem Professor Richter angegriffen, von dem wir bereits Seite 152 gehört haben; die Entgegnung ist ebenfalls in den Act. erud. zu finden. Er müsse vor allem bemerken, dass er die Kräfte nicht für etwas Sächliches halte, sondern mit Cartesius zu den Dingen zähle, welche sich immer auf irgend eine andere Sache bezögen, so dass ein und dieselbe Kraft, auf verschiedene Dinge bezogen, gleichzeitig ein ganz verschiedenes Verhältnis haben könne. Wenn nun Jurin sage, der Körper A erhalte durch den Antrieb der Feder eine neue Kraft gleich der, welche er in Folge der Bewegung des Tisches schon hatte, nimmermehr aber eine dreimal so grosse, so glaube er (Richter), dass man weder das eine noch das andere unbedingt behaupten könne. Allerdings erlangt der Körper, fährt er fort, eine neue einfache Kraft hinsichtlich des Tisches und der Feder; aber diese Kraft wird nicht zu der Kraft hinzugefügt, welche er vorher hatte; er hatte ja vorher gar keine Kraft, weil er in Ruhe war. Er erlangt aber in derselben Zeit eine dreimal grössere Kraft, wenn man sie auf die Dinge bezieht, durch deren Vergleich er selbst, der Tisch und die Feder schon vorher die erwähnte Bewegung hatten. Nach seiner Meinung müssen die Kräfte immer so gemessen werden, dass ihre Summe nach dem Stosse niemals grösser werden kann als vor demselben. An Stelle der Feder B sei ein Körper B gesetzt, durch dessen Stoss A dieselbe Geschwindigkeit erhalte, wie

durch den Stoss der Feder, weil hiedurch der Vergleich ähnlicher Kräfte leichter werde. Wenn etwa A viermal grösser wie B und C der gemeinsame Schwerpunkt dieser Körper sei und es stosse B auf den ruhenden A mit der Geschwindigkeit und in der Richtung BA, so erhalte A die Geschwindigkeit AD = 2 AC. Wenn aber B mit der Geschwindigkeit BD auf A stosse, das nun die Geschwindigkeit AD haben möge, so werde der Effekt bezüglich der Dinge, welche in gleicher Bewegung mit A getragen werden, derselbe sein wie vorher, bezüglich derjenigen aber, die an dieser Bewegung nicht teil nehmen, werde die Geschwindigkeit des A nochmal so gross sein, nämlich 2 AD = 4 AC und B werde nach dem Stosse die Geschwindigkeit AC haben. Nach dem neuen Mafse sei nun vor dem Stosse $A \cdot AD^2 + B \cdot BD^2 = 16 + 49 = 65$ und nach demselben $64 + 1 = 65$. Wende man aber das alte Mafs an, so habe man vor dem Stosse $8 + 7$ und nach demselben $16 + 1$. Daraus ergebe sich aber eine unerklärliche Differenz der Kräfte in den Körpern. Man könne auch nicht sagen, dass man die Kräfte, welche in entgegengesetzter Richtung wirken, subtrahieren müsse; denn dadurch finde man nicht die eigentlichen Körperkräfte, sondern nur ihre gemeinsame Bewegung; und wenn diese vor und nach dem Stosse dieselbe sein sollte, so müssten doch deshalb nicht die Summen der Kräfte verschieden sein. Was nun den anderen Beweis Jurins betrifft, sagt Richter: Wenn Wasser auf eine Ebene stürze, so müssten notwendig die vorauseilenden Teilchen nach dem Stosse den nachfolgenden ein Hindernis bereiten; also müsste der Druck, welchen das Wasser ausübe, grösser sein, als man mit Hilfe des Experimentes finde, wenn jenes Hindernis bei Seite geschafft werden könnte. Da aber das Wasser nach Mariott einen Druck ausübe, der dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional sei, so müsse seine Kraft grösser und demnach, was sich auch aus anderen Beweisen ergebe, dem Kubus seiner Ge-

schwindigkeit proportional sein. Im übrigen weise er auf Bernoullis neue Arbeit hin. (Seite 160.)

Vergleicht man die Ausführungen Jurins und Richters, die ja beide das Criterium der Einfachheit für sich in Anspruch nehmen, so muss man gestehen, dass eine endgültige Entscheidung darüber, wessen Ansicht die richtige sei, auf Grund der von ihnen angewendeten Beweismittel geradezu unmöglich ist. Wir kommen mehr und mehr zu der Ansicht, die ein grosser Gelehrter mit Erfolg verteidigt hat, dass mit der Annahme nur äusserer Kräfte in dieser Frage niemals eine Entscheidung getroffen werden könne.

XXXIV. Der Leipziger Professor August Hausen sprach bei Gelegenheit eines Festes der Universität im Jahre 1741 über Reaktion und Trägheit und deren Folgen, welch letztere auch Schlüsse in Bezug auf unsere Frage zu ziehen gestatten.

Wenn ein Körper eine gegebene Bewegungsgrösse hat, so kann man fragen, durch welche Kräfte diese erzeugt oder vernichtet werden kann, vorausgesetzt, jede Bewegung entstehe in der Kontinuität des Raumes und der Zeit und durch kontinuierliche Kräfte. Wie aber das Kräftesystem auch beschaffen sein mag, so ergibt sich aus den Sätzen Galileis, dass bei gleichen Zunahmen der Kräfte auch die Geschwindigkeiten von der Ruhelage aus gerechnet die gleichen sein müssen. Wenn also in zwei Systemen gleichförmiger Kräfte F und f, welche in den Räumen S und s wirken, $f \cdot s = F \cdot S$ ist, so werden die Geschwindigkeiten am Ende dieser Räume ohne Zweifel gleich sein und umgekehrt, wie auch die Massen sein mögen. Sind die Massen, welche sich über s und S bewegen A und B, die beschleunigenden Kräfte f und F, so verhalten sich die Körperkräfte wie $Afs : BFS$ oder wie $v^2A : V^2B$, wenn v und V die am Ende von s und S erlangten Geschwindigkeiten bezeichnen. Ist $f \cdot s = F \cdot S$ und demnach $v = V$, so verhalten sich sowohl die Kräfte als

auch die Bewegungen wie die Massen; d. h. Bewegungen mit gleichen Geschwindigkeiten lassen sich durch Kräfte erzeugen, welche sich wie die Massen verhalten. Ist $fsA = FSB$ d. h. $v^2A = V^2B$, sind also die Kräfte gleich, so können die Bewegungen nicht gleich sein. Sind endlich die Massen gleich, so verhalten sich die Kräfte wie $f \cdot s : F \cdot S = v^2 : V^2$. Also ist klar, sagt Hausen, dass die Bewegung eines jeden Körpers C mit der Geschwindigkeit v von Kräften erzeugt werden könne, welche kontinuierlich und successive wirken und sich wie $v^2C$ verhalten, welches auch das Kräftesystem sein mag; und wenn dieses gleichförmig ist, wie das Galileis, wie $f \cdot s \cdot C$ und wenn man alle Bewegungen auf ein und dasselbe bezieht, wie bei unserer Schwerkraft, wie $s \cdot C$, indem man $f = 1$ setzt, wenn man nur unter Kraft eines Körpers all das versteht, was er zu leisten im stande ist, bevor er seine ganze Bewegung aufgewandt hat. Aber zu bemerken ist, dass wenn ein bewegter Körper eine Kraft ausübt, falls irgend etwas seine Bewegung hindert, daraus noch nicht folgt, dass er dies auch bewirke, wenn er kein Hindernis erleidet. Die sogenannten unschädlichen Effekte sind leere Worte. In einer einmal erzeugten Bewegung ist nichts zu finden, was erzeugt werden sollte, sondern bloss ein Fortbestehen dessen, was vor dem Effekte ist. Wollte Jemand beweisen, dass die Dauer des Zustandes eine Aktion erfordere, so wird das nicht eine Aktion des Körpers sein, sondern eine wesentlich mit dem Körper im Leibnitzianischen Sinne verbundene Kraft. Ein bewegter Körper kann ausser der Änderung seines Zustandes nichts bewirken und es gibt angesehene Gelehrte, welche bei einer gleichförmigen Bewegung die Leibnitzsche Kraft, welche sie sonst anerkennen, nicht zulassen.

Wenn aber die Kraft eines Körpers $v^2C$ ist, so ergibt sich weiter, dass die Summe der Kräfte, durch welche eine Bewegung erzeugt werden kann, vor und nach der Wirkung

die gleiche ist. Und nun zeigt Hausen an einem Beispiele, dass, wenn man die Reaktion bewegter Körper untersuche, man unbedingt auf die Erhaltung der lebendigen Kräfte stossen müsse. Nur Huyghens habe dieses Gesetz erkannt (s. S. 74); es sei aber von all denen übersehen worden, welche nicht wahrnahmen, dass die Bedingungen, unter welchen bewegte Körper aufeinander wirken, dieselben seien, wie die fallender oder steigender Massen. Das Gesetz gehe aber nur dahin, dass die Kräfte, durch welche Bewegungen erzeugt werden, erhalten bleiben. Was sonst noch von Einigen diesen Kräften zugeschrieben werde, scheine ihm nicht bewiesen zu sein.

Es gebe nämlich angesehene Männer, welche in dem bewegten Körper etwas wirklich Existierendes annehmen, das sie lebendige Kraft des bewegten Körpers nennen. Dieses werde mit der Bewegung in dem Maſse erzeugt, das durch die Kräfte bezeichnet worden sei, durch welche eine Bewegung erzeugt werden könne und bleibe in dem Maſse in den Körpern, solange die Bewegung dauere; sobald sich diese aber ändere, entstehe es in anderen Körpern und gehe in diesem Sinne auf sie über in dem Maſse, nach welchem neu erzeugte Bewegungen erzeugt werden können.

Aus diesen Annahmen leiten nun einige den Beweis für das Maſs der Kräfte ab, durch welche Bewegungen erzeugt und vernichtet werden können. Und dieser Beweis sei ohne Zweifel allgemein und kurz, wenn jene Annahme so fest stünde, dass sie unter die Prinzipien eines Beweises aufgenommen werden könnte. Den Mathematikern könne es gleichgiltig sein, ob der Körper selbst oder ob eine mit ihm verbundene aber von ihm verschiedene Sache die bewegende Ursache sei. Die Entscheidung hierüber gehöre vielmehr in das Gebiet der Philosophie. Einigen sei nun jene lebendige Kraft Leibnitzens so klar, dass man nichts Weiteres verlangen könne. Er wünsche nur dass das, was rein mathematisch

sei in dieser Sache, vom Metaphysischen getrennt werde und dass jenes, wenn man den Beweis dafür anderswo hernehmen könne, wie Leibnitz bekenne, nicht mit dem bewiesen werde, worüber mehrere in Zweifel seien, sondern nach Sitte der alten Mathematiker unter die Beweisprinzipien aufgenommen werde. Und da es nach den allgemeinen Gesetzen des Universums, die jener grosse Mann aufgestellt, das nicht gebe, was wir actio und passio nennen, sondern alles in jeder Substanz durch die Kraft der eigenen Existenz entstehe, und in jeder Änderung nichts anderes sei, als eine Aneinanderreihung gleichzeitiger Zustände, so scheine es dasselbe zu sein in der Mechanik und Physik, von der lebendigen Kraft Leibnitzens zu reden, wie in einem harmonischen System von dem physischen Einflusse und der actio und passio. Dort hänge alles von äusseren Dingen ab, hier aber von sich selbst und es gebe keinen Folgezustand, ausser in dem Bereiche ein und derselben Substanz.

Bemerkenswert ist Hausens Arbeit namentlich deswegen, weil, wie wir später sehen werden, Kant mit aller Kraft dafür eintrat, dass man einen Beweis, sei es für oder gegen das Mafs Leibnitzens, überhaupt nicht aus der Mathematik schöpfen, sondern nur dem Gebiete der Philosophie entnehmen könne, was um so mehr betont werden muss, als keiner von diesen beiden Gelehrten von den Forschungen des anderen Kenntnis gehabt zu haben scheint.

XXXV. Im nämlichen Jahre erschien die zweite Auflage von Musschenbroeks elementa physica, in welchen dieser als eifriger Verteidiger Leibnitzens auftrat. Ein kurzer Abriss der Physik war bereits im Jahre 1726 erschienen, die erweiterte 1. Auflage unter obigem Titel 1736; eine treffliche Übersetzung der zweiten lieferte der Leipziger Professor Joh. Christ. Gottsched 1747; eine kommentierte Ausgabe kam in Neapel 1751 heraus. Aus diesem Grunde glaubte ich an dieser Stelle von genannter Arbeit sprechen zu sollen; denn

das kleine Werkchen scheint wenig und die erste Auflage des grösseren nicht in dem Maſse von den lebendigen Kräften gehandelt zu haben, wohl deswegen, weil der Streit durch das energische Eintreten der Engländer für das alte Maſs erst in dieser Zeit ein brennender geworden war.

Im sechsten Hauptstücke spricht Musschenbroek von den Kräften bewegter Körper. Mersennus scheine zuerst experimentell eine Lösung der Frage bezüglich des Maſses der Kräfte versucht zu haben; er habe zu finden geglaubt, dass sich Kräfte verhalten wie die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten. Auch Riccioli habe ihm beigestimmt, obgleich Musschenbroek meint, dieser hätte zu einem ganz anderen Schlusse kommen müssen, wenn er anderen Versuchen nachgegangen wäre.

Was die Experimente dieses Gelehrten betrifft, so entnehme ich dem Kommentare der eben erwähnten neapolitanischen Ausgabe, dessen Autor nicht angegeben ist, folgendes: Er steckte einen Stab in Butter und liess auf denselben Kugeln aus verschiedenen Höhen herabfallen. Verhielten sich diese Höhen wie 1 : 4 : 9 : 16 u. s. w., so verhielten sich die Tiefen, bis zu welchen der Stab eingedrückt wurde, wie 40 : 115 : 196 : 278; das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Kugeln ist aber 1 : 2 : 3 : 4 und das widerspricht der Annahme Ricciolis; denn 1 : 2 : 3 : 4 = 40 : 80 : 120 : 160. Ähnliches gelte von den Experimenten Polens und s'Gravesandes. Bemerkenswert ist, dass Musschenbroek auch Huyghens zur Partei Leibnitzens rechnet, was der genannte Kommentator, wie auch Bernoulli und ein Herr Deslandes bestreiten; doch steht es über allem Zweifel, wie wir Seite 74 gesehen haben, dass Huyghens wenigstens in einem Falle mit Leibnitz übereinstimmt.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir nun zu Musschenbroeks eigenen Entwicklungen über:

Ein Körper, auf welchen eine drückende Kraft wirke, müsse durch seinen Widerstand zurückwirken und in dieser wechselweisen Wirkung entstehe eine Kraft oder sie gehe vielmehr aus der Kraft in den Körper über. Die Kraft sei also Wirkung eines einmaligen Druckes oder verschiedener Drucke, die in endlicher Zeit nacheinander folgen. Daher sei die Kraft etwas Fortdauerndes, wenn auch der Druck aufhöre. Jede drückende Kraft habe eine bestimmte Grösse und könne deshalb in dem Körper nur eine bestimmte Geschwindigkeit und eine bestimmte lebendige Kraft erzeugen. Befinde sich die Kraft ausserhalb des Körpers und bleibe dieser in dem durch den Druck erhaltenen Zustande, so könne sie den Körper nach der nämlichen Richtung nicht mehr drücken; denn sie könne dem Körper nur mehr die Geschwindigkeit mitteilen, die er schon habe. Eine Feder könne, indem sie sich von B nach C ausdehne, einem in B ruhenden Körper eine gewisse Geschwindigkeit erteilen; habe aber der Körper in C sich befindend schon diese Geschwindigkeit, so könne eben diese Feder durch ihre Ausdehnung ihm keine neue Geschwindigkeit mehr erteilen, weil sie ihn dort gar nicht mehr treffe; es bedürfe vielmehr einer zweiten gleichen Feder, um dem Körper eine neue Geschwindigkeit zu verleihen; und falls der Körper einen dritten Grad Geschwindigkeit erlangen sollte, so sei eine dritte Feder nötig u. s. w. Also bekomme ein Körper, auf welchen viele äussere Kräfte gleichzeitig wirken, einen Grad von Geschwindigkeit, der der Zahl der wirkenden Kräfte gleich sei. Um demnach einem Körper, der schon in Bewegung ist, eine neue Bewegung mitzuteilen, seien sehr viele Kräfte erforderlich; wenn z. B. ein Körper mit 100 Grad Geschwindigkeit laufe, so sei nicht eine, sondern 101 neue Kräfte erforderlich, ihm einen weiteren Grad von Geschwindigkeit zu verleihen.

Es sei also weit schwerer, die Bewegung eines Körpers zu beschleunigen, als ihn aus der Ruhe zu bringen; aller-

dings wird man beifügen müssen, wenn die Wirkung der Kraft immer von demselben Punkte aus geschieht; denn wenn der Körper in C die im erstgenannten Falle erlangte Geschwindigkeit hat und man denkt sich die Feder in C wirkend, so ist wohl kein Zweifel, dass sie demselben eine weitere Geschwindigkeit erteilen wird. Also, schliesst Musschenbroek, verhalten sich die beschleunigenden Kräfte und demnach auch die Widerstände, welche der Körper der Beschleunigung entgegensetzt, wie die Geschwindigkeiten. In dem bewegten Körper aber entsteht eine Kraft, die sich wie die Zahl der Kräfte verhält, welche ihm die Geschwindigkeit mitteilen.

Wenn die drückenden Kräfte einander gleich sind und nach und nach hinzukommen, so entstehen die Grade der Beschleunigung in dem Körper in gleichen Zeiten. Die Kräfte eines bewegten Körpers verhalten sich aber wie die Quadrate der Geschwindigkeit, mit der er sich bewegt; denn man denke sich die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks in unendlich kleine gleiche Teile zerlegt, deren jeder einen Grad Geschwindigkeit darstelle und ziehe durch jeden Teilpunkt die Parallelen zur anderen Kathete, welche die Kräfte darstellen, die diese Geschwindigkeiten erzeugen; dann stellt die $n^{te}$ Parallele die n Kräfte dar, welche dem Körper den $n^{ten}$ Grad Geschwindigkeit mitteilen, die Fläche des Dreiecks aber die Summe aller Kräfte, welche nötig sind, dem Körper die Geschwindigkeit zu geben, welche durch die eine Kathete desselben dargestellt ist, woraus sich ergibt, dass diese Kräfte sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten. — Zu diesem Beweise sagt der Kommentator, er sei zwar sehr elegant und geistreich, aber nicht stichhaltig; denn die $n^{te}$ Parallele, welche die n Kräfte darstellen, sei nicht das wahre Bild der Wirkung dieser Kräfte, weil n-1 derselben in Folge der schon erlangten n-1 Kräfte des Körpers wirkungslos seien und nur die $n^{te}$ Kraft eine neue Geschwindig-

keit erzeuge, woher es auch komme, dass nicht die Fläche des Dreiecks, sondern nur die Summe der Überschüsse dieser Parallelen über die unmittelbar vorhergehenden, d. h. die zweite Kathete des Dreiecks der Kraft proportional sei; das heisse aber nichts anderes als die Kräfte verhalten sich wie die Geschwindigkeiten. Es ist leicht möglich, dass dieser Beweis dem weiter unten mitzuteilenden Werke Kants entnommen ist, zumal dieses schon 1747, der Kommentar erst 1751 erschien; immerhin kann er auch unabhängig von jenem erfunden sein; ohne Zweifel aber stürzt er den Musschenbroeks, ja es ist geradezu auffallend, dass dieser grosse Gelehrte den in ihm steckenden Widerspruch mit seinen eigenen vorhergehenden Beweisen nicht entdeckte.

Auch einen experimentellen Beweis dafür, dass bei der Bewegung ungleicher Körper mit gleichen Kräften die Quadrate der Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Massen verhalten, finden wir in Musschenbroeks Lehrbuch. Ich will gleich hier bemerken, dass dieses Experiment wie wenig andere, die Richtigkeit des Leibnitz'schen Maſses erweist. Man befestigt an einem hohlen Cylinder, aus welchem ein mit Löchern versehener Stab hervorragt, eine Feder von Stahl; mit Hilfe eines steifen Blechs kann man die Feder beliebig spannen; der Cylinder wird bifilar aufgehängt. Entfernt man das Blech, so wird der Cylinder durch die sich ausdehnende Feder einige Grade hoch geworfen, welche seine Geschwindigkeit andeuten. Gesetzt, er steige 10 Grad hoch, so ist seine Kraft 100. Macht man nun den Cylinder durch ein eingelegtes Gewicht nochmal so schwer und spannt die Feder wie vorher, so wird durch deren Ausdehnung der Cylinder $7_{,07}$ Grad hoch geworfen, denn sie teilt ihm wie vorher 100 Grad Kraft mit; also trifft auf die einfache Masse 50, was nahezu $7_{,07}{}^2$ gibt. Obgleich sich nun die Feder in beiden Versuchen nicht in der gleichen Zeit ausspannt, so entsteht dadurch keine Veränderung in der Berechnung; denn mag

dieselbe sich vom Punkte ihrer grössten bis zu dem ihrer geringsten Spannung langsam oder schnell bewegen, ihre Wirkung wird die nämliche sein; denn diese besteht aus den Kräften V, die sie in jedem Punkte ihrer Spannung ausübt, aus der Geschwindigkeit C, mit der sie sich ausspannt und der Zeit T, in der dieses geschieht; doch die ganze Wirkung ist $V \cdot C \cdot T$; wird nun C 2 mal grösser, so wird dafür T 2 mal kleiner und somit bleibt jenes Produkt unverändert. Das ist aber jener viel bestrittene Satz Leibnitzens, dass die Wirkung einer Kraft von ihrer Dauer unabhängig sei. Demnach ist also die Wirkung einer Feder, sagt Musschenbroek, welche sich mit der doppelten Kraft durch den doppelten Raum ausspannt, viermal grösser und folglich bewegt sich der Körper mit zweimal grösserer Geschwindigkeit als vorher. Das gelte nun von den von aussen wirkenden Kräften. Sei aber die Kraft innerlich in dem Körper — und diesen Fall müssen wir deswegen betrachten, weil, wie wir unten sehen werden, Kant gerade aus dieser Annahme das Mafs der Kräfte abgeleitet hat — so erteile dieselbe dem Körper in unendlich kleiner Zeit einige Geschwindigkeit; weil aber diese Kraft in dem Körper selbst gedacht werde, so ruhe sie in Ansehung des Körpers, möge sich dieser bewegen oder nicht; also werde sie in gleichen Zeiten stets eine gleiche Anzahl Grade von Geschwindigkeit hervorbringen können. Von einer einzigen Kraft im Körper könne also dieselbe Wirkung hervorgebracht werden, wie von verschiedenen äusseren Kräften und durch eine solche Kraft werde auch die gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorgebracht. Diese Ursache bringe aber in gleichen Zeiten ungleiche Kräfte im Körper hervor; denn da in der ersten Zeit nur eine Geschwindigkeit von ihr erzeugt werde, so sei auch die Kraft nur wie 1; und da sie in doppelter Zeit eine zweifache Geschwindigkeit erzeuge, so seien die Kräfte wie 4, also werden in der zweiten Zeit drei neue Kräfte erzeugt.

Ein Körper, welcher von einer solchen inneren Kraft bewegt werde, beschreibe bei seiner Bewegung Linien, welche sich wie die Quadrate der Zeiten oder Geschwindigkeiten verhalten; also verhielten sich die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 u. s. w. Und daraus folge weiter, dass die Räume und die Kräfte eines so bewegten Körpers im Verhältnisse der Gleichheit stehen.

Die Kraft, welche in einem Körper ist, kann durch einen entgegengesetzten Druck vermindert oder aufgehoben werden, möge sie nun kürzere oder längere Zeit wirken; je grösser der Widerstand ist, desto rascher wird die Kraft aufgehoben; aber die Wirkung bleibt dieselbe; denn wenn ein Körper 100 Kräfte hat, so muss der Widerstand, welcher sie aufheben soll, auch 100 Kräfte haben. Auf die oben bemerkten Experimente Ricciolis aber anspielend sagt Musschenbroek Folgendes: Wenn ein Körper mit seiner Kraft auf einen weichen Körper wirkt, so wird derselbe ihm widerstehen, bis er die Teile aus ihrem Zusammenhange bringt. Und weil diese gleichförmig zusammenhängen, so wird sich der Widerstand wie die Anzahl der getrennten Teile verhalten; also ist der ganze Effekt des bewegten Körpers wie das Grübchen, das er dem weichen Körper eindrückt; dasselbe ist das nämliche, ob es langsam oder schnell eingeprägt wird, weil die nämlichen Kräfte aufgewendet werden müssen.

Ist in dem bewegten Körper eine Kraft, die in entgegengesetzter Richtung wirkt, so wird man in gleichen Zeiten eine gleiche Abnahme der Geschwindigkeiten bekommen; eine solche Kraft wird also in gleichen Zeiten ungleiche Kräfte aufheben und ebenso verhält es sich mit den Räumen, welche von einem solchen Körper zurückgelegt werden.

Soweit Musschenbroek. An seine Ausführungen, aus welchen ja der Gegensatz der beiden Maſse so deutlich

hervorgeht, knüpft nun der mehrfach erwähnte Kommentator eine appendix conciliatrix, welche in einer Geschichte dieses Streites doch wohl nicht stillschweigend übergangen werden darf. Wenn man sich die Sache eifrig überlege, so komme man zu der bestimmten Ansicht, dass sich die widersprechenden Anschauungen leicht versöhnen liessen und dass der ganze Streit sich nur um einen Namen drehe. Zu dieser Anschauung brächte ihn einerseits die Auctorität grosser Gelehrter, andrerseits die Beobachtung, dass sich alle mechanischen Effekte nach dem einen oder anderen Mafse auf gleiche Weise ergäben. Den Versuch zu einer solchen Versöhnung habe nun Nikolaus Martin, Professor am Lyceum in Neapel gemacht im 19. Kapitel seiner Dissertatio de corporum quae moventur viribus 1741. Auch sei kurz vor der Ausgabe dieses Commentars (1751) eine Abhandlung in den Phil. Transact. erschienen, in welcher gezeigt werde, dass der ganze Streit sich um Worte drehe, unter dem Titel de quantitate ejusque propria et impropria specie.

Nach Aristoteles müsse man zwei Arten von Grössen unterscheiden: eigentliche und uneigentliche; erstere seien diejenigen, welche man mit Grössen gleicher Art messe, letztere solche, bei denen dies nicht möglich sei, sondern als deren Mafs man eine andere Grösse nehmen müsse, welche zu jenen in irgend welcher Beziehung stehe; zu letzteren gehöre auch die Geschwindigkeit. Die eigentlichen Grössen liessen sich immer auf drei zurückführen: Ausdehnung, Zeit und Zahl, uneigentliche gäbe es aber weit mehr. Sollten letztere ein Gegenstand philosophischer oder mathematischer Betrachtung werden, so müssten immer klare und bestimmte Definitionen derselben vorhergehen, weil man sie sonst nicht vergleichen und ihre Beziehungen nicht aufdecken könne. Darin suche jener Autor auch die Quellen des Streites um das Mafs der Kräfte, weil nämlich die Philosophen dasselbe durch mathematische Schlüsse und durch Experimente fest-

stellen wollten, während es doch in der Definition enthalten sein müsste. Wenn man die Kräfte bewegter Körper nicht auf eine andere Grösse, deren Mafs bekannt sei, durch die Definition beziehen könne, so sei nie zu entscheiden, welche Kraft zwei- oder dreimal grösser sei wie eine andere. Man könne also Newton gar nicht genug loben, dass er in seiner Abhandlung über die Centralkräfte folgende Definition aufstellte: Die Beschleunigungsgrösse der Centripetalkraft, welche der Geschwindigkeit, die sie in gegebener Zeit erzeugt, proportional ist, ist ein Mafs derselben und die Bewegungsgrösse der Centripetalkraft, welche der Bewegung, die sie in einer gegebenen Zeit erzeugt, proportional ist, ist ein Mafs derselben. Indem also Newton die Kraft eines bewegten Körpers durch die erzeugte Geschwindigkeit messe, gebe er eine deutliche Definition derselben, mit Hilfe deren man die Kräfte leicht unter sich vergleichen könne.

Diese Definition sei aber der gewöhnlichen Art, von Kräften zu reden ganz angepasst; denn 1) nehme man allgemein an, dass durch die Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeit eines Körpers auch dessen erzeugende Kraft vermehrt oder vermindert werde; 2) stiessen zwei Körper zusammen, ohne dass eine neue Bewegung entstünde, so werde allgemein angenommen, ihre Kräfte seien gleich; das hiesse doch ihre Kräfte seien bestimmt durch Masse und Geschwindigkeit; 3) da in der Mechanik Kraft und Last im umgekehrten Verhältnisse ihrer Geschwindigkeiten stünden, so ergebe sich daraus wiederum, dass die Kräfte durch Geschwindigkeit und Masse bestimmt seien; 4) Jedermann räume nach Galileis Definition von der Schwerkraft ohne Bedenken ein, dass die in gleichen Zeiten dem Körper mitgeteilten Geschwindigkeiten gleich seien; dadurch sei aber jene Kraft so deutlich als möglich definiert.

Durch mathematische Schlüsse oder durch Experimente könne kein Beweis dafür geliefert werden, dass die Kraft

eines bewegten Körpers sich wie seine Geschwindigkeit verhalte, sondern nur durch eine Definition könne ihr diese Eigenschaft beigelegt werden. Wenn also die Leibnitzianer ihr Mafs als eine Definition der Kräfte auffassten, so könne man ihnen nicht widerstreiten, weil dabei nur ein Kampf um Worte entstünde; das sei gerade so, wie wenn man eine gegebene Länge mit zwei verschiedenen Einheiten messe. Einfacher sei aber die Definition Leibnitzens keineswegs und auch der gewöhnlichen Anschauung nicht entsprechender. Aber er stelle ja sein Mafs nicht als eine Definition, sondern als eine auf Experimente und Vernunftschlüsse begründete Thatsache hin und seine Definition bestehe darin, dass er sage, die Höhe, zu welcher ein Körper aufsteige, sei der volle Effekt seiner Kraft und ein Mafs derselben. Aber gerade diese Behauptung werde von der anderen Partei bestritten, weil man zur Vergleichung von Effekten nur gleichzeitige Wirkungen nehmen dürfe. Und das sei auch richtig; man könne also jene Definition Newtons überhaupt auf Kräfte anwenden.

Wir können uns mit diesen Ausführungen nicht ganz einverstanden erklären; denn daraus, dass Kräfte durch Massen und Geschwindigkeiten bestimmt sind, folgt doch nicht, dass dieselben durch die einfachen Geschwindigkeiten gemessen sind. Auf den Vergleich aber mit der durch verschiedene Einheiten gemessenen Länge, sowie auf die Bemerkung, dass die Newtonsche Definition wegen ihrer Einfachheit vorzuziehen sei, kann man wohl mit Recht entgegnen, dass wir nicht das Mafs vorzuziehen haben, welches uns einfacher dünkt, sondern dasjenige, welches der Wirklichkeit entspricht.

XXXVI. Die Akademie in Bologna hat sich vielfach mit der Frage der lebendigen Kräfte beschäftigt; Zeugnis dafür gibt ausser den Arbeiten Riccatus' und Zanottis ein Referat über mehrere Sitzungen dieser Akademie, welches im ersten Teile des zweites Bandes der Comment. Bonon.

1748 enthalten ist und welches den letztgenannten Gelehrten zum Autor zu haben scheint. Da aus demselben ein Bild des Streites, soweit er sich auf italischem Boden entwickelte, gewonnen werden kann, so will ich kurz das Wesentlichste aus demselben mitteilen. Anknüpfend an Bernoullis Arbeit über die lebendige Kraft bemerkt Heraklit Manfred, er sehe nicht ein, wie eine Reihe von Federn, welche sich ausdehnt, auf die eine Kugel nicht ebenso wirken sollte wie auf die andere; er wisse auch nicht, ob nicht jenes allgemein angenommene Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung hieher gehöre; denn in der ganzen Reihe gäbe es keine Feder, welche nicht auf eine andere wirke, ohne dass diese auf jene zurückwirke; es trete also eine kontinuierliche, gleichmässige Wirkung ein, durch welche zwei Kugeln, die nach entgegengesetzter Richtung getrieben werden, die gleiche Kraft empfangen. Er glaubt ferner, mit Hilfe der Bernoullischen Definition der lebendigen Kraft beweisen zu können, dass dieselbe der einfachen Geschwindigkeit proportional sei. Man denke sich eine Feder, deren einer Schenkel befestigt sei, während der andere sich frei bewegen könne. Indem sie sich öffne, stosse sie das einemal gegen eine Kugel von 2 Pfd., das andremal gegen eine solche von 3 Pfd. In beiden Fällen werde sie den gleichen Druck ausüben und den Kugeln die gleiche Bewegungsgrösse mitteilen, so dass die Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Aber sie werde ihnen auch dieselbe lebendige Kraft mitteilen, nämlich diejenige, welche sie selbst habe. Messe man aber diese mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, so könne sie nicht dieselbe sein. — Eine Widerlegung dieser Ansicht erfolgte nicht. Ein andermal war die Rede davon, dass viele meinten, es handle sich hier mehr um einen Kampf um Worte denn um Thatsachen und um diese Anschauung zu widerlegen, teilte Zanotti einen Brief des neapolitanischen Mathematikers Peter Martin mit, eines eifrigen Anhängers

des Cartesius, in welchem dieser bemerkt: Fast Niemand habe die Überzeugung, dass ein Körper, welcher auf eine weiche Materie falle, Grübchen aushöhle, die der Höhe, aus der er gefallen, proportional seien. Und darauf stützten doch die Leibnitzianer vielfach ihre Ansicht. Mairan, Fontenell und Musschenbroek bezeugen die Richtigkeit dieses Experimentes; er aber (Martin) leugne es vollständig; er habe gefunden, dass der nämliche Körper aus verschiedenen Höhen fallend Grübchen erzeuge, welche den Wurzeln aus den Höhen proportional seien. Diese Differenz liess sich aber nicht erklären, weil aus Martins Briefe nicht zu erkennen war, ob er unter Grübchen die ausgehöhlten Kugelsegmente oder nur deren Tiefen verstand.

Eustachius Zanottus sprach die Ansicht aus, dass es zweifelhaft sei, ob überhaupt mit dieser Art von Experimenten eine Entscheidung getroffen werden könne. Diejenigen, welche die Kräfte mit dem Quadrate der Geschwindigkeiten messen, machten dies so, weil sie sähen, dass die Produkte in diesem Falle gleich würden, falls die Kugeln gleiche Kräfte erlangten; sie würden mit den Kuben messen, wenn in diesem Falle die Produkte die gleichen wären. Das hänge aber mit dem Gesetze der Schwere zusammen; wäre dies ein anderes, so wäre auch das Maſs der Kräfte ein anderes. Gegen die Cartesianer sei um deswillen weniger einzuwenden, weil sie diesen Experimenten nicht viel Vertrauen erwiesen.

Die Akademiker Balbus und Galertius stellten Experimente an, um in diese Frage Licht zu bringen. Auf einer schiefen Ebene machten sie eine längliche Aushöhlung, durch welche ein kleiner Körper auf die Erde fallen konnte; das Ende dieser Aushöhlung wurde mit einem ganz leichten Stäbchen verschlossen, das beweglich und mit einer kleinen Scheibe versehen war, damit der Körper im Falle auf das Stäbchen stossend diese Scheibe einen Bogen be-

schreiben lasse; es sollte untersucht werden, in welchem Verhältnisse diese Bogen standen, wenn der Körper aus verschiedenen Höhen herabfiel und es fand sich, dass dieses Verhältnis immer das nämliche war, wie das der Höhen, was also für die Richtigkeit des Leibnitzschen Maſses zeugt. Allerdings ist dieses Experiment im wesentlichen kein anderes als jenes mit den Grübchen.

Der Mathematiker Scarsellius bezweifelt, ob ein Körper, der mit der Masse 4 aus der Höhe 1 fällt und ein solcher, welcher mit der Masse 1 aus der Höhe 4 fällt, gleiche Kraft haben. Die Körper können nämlich ihre Kraft nur durch fortwährende Stösse der Schwere erlangen; je mehr Stösse sie empfangen, eine desto grössere Kraft erhalten sie. Wenn nun der Körper B doppelt so lange fällt als A, so erhält er auch zweimal so viel Stösse, vorausgesetzt A und B seien von gleicher Masse. Wenn aber A die vierfache Masse des B enthält und die gleiche Zeit zum Falle braucht wie A, so wird A die vierfache Zahl von Stössen erhalten. Braucht also B die doppelte Zeit wie A und dieses ist viermal grösser als jenes, so wird A zweimal mehr Stösse erhalten wie B, das heisst ihre Kräfte werden nicht gleich sein. Eine Widerlegung dieser Entwicklung ergab sich in der Akademie nicht und so blieb dieser schon oft erhobene Einwand der Zeit wiederum unentschieden.

In einer anderen Sitzung war erwähnt worden, dass auf die Frage der Cartesianer, was denn mit völlig harten Körpern geschehe, welche mit Geschwindigkeiten, die ihren Massen reciprok proportional sind, aufeinanderstossen, die Leibnitzianer zu antworten pflegten, es gäbe keine völlig harten Körper. Das heisse aber der Frage ausweichen, meint F. Zanottus, nicht sie beantworten. Es handle sich nicht darum, ob es wirklich feste Körper gebe, sondern ob es solche geben könne; jedenfalls könne man sich solche vorstellen.

Bewegende Kraft und lebendige Kraft seien völlig ver-

schiedene Dinge; erstere sei diejenige, welche die Körper in Bewegung setze, letztere diejenige, durch welche ein in Bewegung gesetzter Körper eine Wirkung hervorbringe, wobei sie vernichtet werde. Jene gehe der Bewegung voraus, diese folge ihr. Die lebendige Kraft sei immer eine solche, welche bei der Überwindung positiver Widerstände vernichtet werde; und wenn deshalb ein bewegter Körper auf eine völlig fest gedachte Kugel stosse, so entstehe überhaupt keine lebendige Kraft, weil die bewegende Kraft bei Überwindung dieses Hindernisses nicht verzehrt werde, sondern sich nur auf diese Kugel entweder ganz oder teilweise übertrage. Die Leibnitzianer hätten also den Cartesianern nicht erwidern sollen, es gebe keine völlig festen Körper, sondern sie hätten sagen sollen, beim Stosse solcher Körper entstehe überhaupt keine lebendige Kraft.

In jedem bewegten Körper, lesen wir ferner, ist eine Kraft, die man aber in zwei Teile zerlegen muss; der eine Teil wird durch die Überwindung von Hindernissen verzehrt, der andere setzt die Bewegung fort.

Wie nun zwischen bewegender und lebendiger Kraft ein Unterschied ist, so besteht auch ein solcher zwischen bewegender und toter Kraft; bewegende Kraft ist nicht tot, weil sie in Bewegung setzt, aber auch nicht lebendig, weil sie bei der Bewegung nicht absorbiert wird.

Die Ansicht, dass beim Zusammenstosse zweier festen Körper überhaupt keine lebendige Kraft entstehe, wurde von dem Modenenser Peter Ferrarius bestritten; denn der Widerstand, welchen die gestossene Kugel der stossenden entgegensetze, müsse von dieser überwunden werden, also nach Zanottis eigener Definition lebendige Kraft entstehen. Zanotti erwiderte darauf, es sei eine andere Art des Widerstandes, wenn dabei Kraft verloren gehe, als wenn sie bloss übertragen werde; man könne also in letzterem Falle durchaus nicht von lebendiger Kraft sprechen. —

Ein positives, überzeugendes Resultat gewinnen wir freilich aus diesen Verhandlungen, die vorwiegend dialektischer Natur sind, auch nicht; aber zu übergehen waren sie eben doch nicht aus dem schon oben angeführten Grunde.

XXXVII. Als eifriger Verteidiger des Leibnitzschen Maſses erweist sich der Bruder des oben erwähnten J. Riccatus, Vincenz Riccatus in einer Abhandlung de causa physica compositionis et resolutionis virium, welche im zweiten Teile des zweiten Bandes der Comment. Bonon. enthalten ist.

Vor allem müsse man daran festhalten, dass Ursache und Wirkung unter allen Umständen äquivalent seien. Wie könne es also möglich sein, dass zwei gleichzeitig wirkende Kräfte durch Zusammensetzung eine Kraft erzeugen, welche kleiner ist, als ihre Summe?

Jene Philosophen, welche die lebendigen Kräfte mit der Bewegungsgrösse messen, würden nicht den geringsten Erfolg haben, wenn sie nicht bloss Kräfte, sondern auch deren Wirkungen ihrer Betrachtung unterwürfen. Da nämlich nach ihrer Lehre die Wirkungen von Kräften sich verhalten wie diese Kräfte und wie die Zeiten, die aber als gleich angenommen würden, so müsse sich immer das nämliche Verhältnis der Kräfte und Wirkungen ergeben. Daher scheine es auch gar nicht wunderbar, wenn Mairan, Martin und Andere lehrten, durch Zusammensetzung könnten Kräfte vermindert werden, durch Auflösung vergrössert, wobei natürlich die Gleichheit von Ursache und Wirkung verloren gehe.

Glücklicher habe Bülffinger die Sache angepackt (s. S. 97). Aus seinem Prinzipe ergebe sich deutlich, dass Wirkung und Ursache gleich seien, falls die Richtungen der Kräfte einen rechten Winkel einschliessen. Bei spitzem oder stumpfem Winkel scheine aber diese Gleichheit zu fehlen. Es scheine ihm aber unhaltbar, wie im Falle des spitzen Winkels zwei Kräfte, mögen sie sich auch unterstützen, einen grösseren Effekt erzeugen sollten, als die nämlichen zwei

Kräfte, wenn sie einzeln wirken. Er könne sich auch mit der Erklärung dieses Phänomens, welche Bülffinger gebe, nicht befriedigt halten; denn nach derselben ergebe sich kein Unterschied zwischen einzeln und gleichzeitig wirkenden Kräften; woher sollte also ein Unterschied in ihren Wirkungen kommen?

Riccatus will nun diese Unklarheiten im Beweise Bülffingers aufklären und hält als das günstigte Hilfsmittel hiezu tönende Saiten. Er stützt sich auf folgende Hypothesen: 1) Gespannte Saiten haben konstante Elasticität, solange sie nur eine unendlich kleine Ausdehnung oder Zusammenziehung erfahren. 2) Die Wirkungen elastischer Saiten sind während ihrer Ausdehnung beziehungsweise Zusammenziehung proportional den Intensitäten der elastischen Kräfte und den Zusammenziehungen. 3) Gespannte Saiten ziehen sich aus eigenem Antriebe zusammen, widerstehen aber einer weiteren Ausdehnung. 4) Daher ist ein Element der lebendigen Kraft, das auf einen Körper übertragen wird, an dem eine oder mehrere Saiten befestigt sind, gleich dem Aggregate aller Wirkungen. Daran reihen sich zwei Definitionen: Eine Kraft heisst gleich zwei oder mehreren Kräften, wenn ihre Wirkung gleich ist der aus den einzelnen Wirkungen zusammengesetzten Wirkung, solange der Körper denselben Weg zurücklegt. 5) Wenn ein Körper, an welchem mehrere Saiten befestigt sind, sich beliebig bewegen kann, so sagt man er bewege sich in freier, ausserdem in gezwungener Richtung.

Wenn nun an dem Körper A eine elastische Saite AS befestigt wird, deren Kraft durch AB ausgedrückt sei und es erfolgt ein Stoss in der gezwungenen Richtung AD, so ist, wenn man aus B die Senkrechte BH auf AD fällt, AH die äquivalente Kraft zu AS in der Richtung AD; denn wenn AD den Körper um den unendlich kleinen Weg Aa bewegt, so ist die Wirkung der Kraft nach Obigem AH · Aa,

Treibt aber AS den Körper um denselben Weg Aa vorwärts und man beschreibt mit Sa den unendlich kleinen Bogen ap, so ist ihre Wirkung $AB \cdot Ap$; nun lässt sich aber leicht zeigen, dass $AH \cdot Aa = AB \cdot Ap$. — In beiden Fällen empfängt der Körper das nämliche Element lebendiger Kraft, also auch die nämliche Geschwindigkeit; folglich wird er auch in der nämlichen Zeit den Weg Aa zurücklegen. Aber die Zeit, während welcher er Aa durchläuft, verhält sich zu der, welche er zu Ap braucht, wie $AB : AH$. Dabei ist zu bemerken, dass nach dieser Methode dieselbe Kraft AB in ungleichen Zeiten die gleiche Wirkung hervorbringen kann, je nach den verschiedenen Richtungen, in welchen sie wirkt. Das heisst also, man braucht auf die Zeit beim Messen der Wirkungen keine Rücksicht zu nehmen; denn da die Geschwindigkeit in a und p dieselbe ist, müssen die lebendigen Kräfte gleich sein, wie man sie auch schätzen mag. Wenn aber Jemand den Einwurf erheben wollte, dass auf die Kraft keine Rücksicht genommen sei, welche das Bewegliche aus der gezwungenen Richtung AD ablenken will, so ist darauf zu erwidern, dass jede Kraft, welche senkrecht auf eine andere wirkt, überhaupt wirkungslos bleibt. Die Kraft, welche übrigens das Bewegliche ablenken will, ist durch BH ausgedrückt. Wird nun der Körper von zwei gespannten elastischen Saiten AS, AT angegriffen und es erfolgt ein Stoss in der gezwungenen Richtung AD, welche in der Ebene der Saiten liegt, und stellen AB, AC die Kräfte der Saiten dar, so ist, wenn man BH und CK senkrecht AD und $AK = KD$ macht, AD die Kraft, welche AB und AC äquivalent ist. Der Beweis ist ähnlich dem obigen. Ebenso leicht lässt sich die Kraft bestimmen, welche den Körper aus seiner Richtung abzulenken sucht.

Wenn sich nun der Körper in freier Richtung bewegen kann, so stellt die Diagonale AD des Parallelogramms ABCD die den Kräften AB, AC äquipollente Kraft dar. Man kann

also auch mit dieser Methode die Richtigkeit längst anerkannter Gesetze beweisen.

Wenn dieselben Kräfte AB, AC einzeln wirkend denselben Körper nach p und q bringen, gemeinsam wirkend aber nach a, so ist die Summe der lebendigen Kräfte in p und q gleich der lebendigen Kraft in a; denn da die Wirkungen in den Elementen Ap, Aq gleich sind der in Aa, so müssen auch die lebendigen Kräfte gleich sein, weshalb die Quadrate der Geschwindigkeiten in p und q dem Quadrate der Geschwindigkeit in a gleich sein müssen.

Die Gleichheit dieser Quadrate kann aber auch direkt erwiesen werden. Nach den Gesetzen Galileis werden die Geschwindigkeiten bei beschleunigter Bewegung durch eine konstante Kraft ausgedrückt, durch die Ordinaten einer Parabel, deren Abscissen die durchlaufenen Räume sind, während der Parameter der doppelten Kraft gleich ist. Nennt man also die Geschwindigkeit in a, p und q resp. dV, du, dv so ist $dV^2 = 2\,AD \cdot Aa$, $du^2 = 2 \cdot AB \cdot Aq$; $dv^2 = 2\,AC \cdot Aq$, also $dV^2 = du^2 + dv^2$.

Die Zeiten, in welchen die Wege Av, Aq, Aa zurückgelegt werden, lassen sich aus Obigem leicht finden; denn $dT : dt = AB : \sqrt{AD \cdot AH}$; und $dT : d\vartheta = AC : \sqrt{AD \cdot AK}$. Aus dem Allen ergibt sich, dass, wenn zwei Saiten einen Körper angreifen, und ihn über den Weg Aa fortschieben, sie dieselbe Wirkung hervorbringen, wie die äquivalente Kraft AD, so dass also eine vollständige Gleichheit zwischen Ursache und Wirkung sich ergibt; denn die Wirkungen sind in beiden Fällen die gleichen.

Wenn man die Wirkungen einzeln wirkender Kräfte mit denen gleichzeitig wirkender vergleichen will, so muss man eben die Wirkungen in Ap und Aq in Betracht ziehen nicht in Am und An, wo m und n die Punkte bezeichnen, bis zu welchen der Körper in derselben Zeit käme, wie von A nach a; denn die Wirkung der Kraft AB in Am ist nicht

gleich der Wirkung derselben Kraft, während A nach a kommt, was sich aus der ungleichen Zusammenziehung derselben Saite ergibt; wohl aber die Wirkung von AB in Ap.

Ist der Winkel BAC ein spitzer, so ist die Diagonalkraft grösser als die Seitenkräfte, aber nicht weil diese sich durch ihre gleichzeitige Wirkung unterstützen, noch auch, weil die eine durch die andere zugleich mit dem Körper übertragen wird und jede auf denselben wirkt, als wenn er in Bezug auf sie in Ruhe wäre, wie Bülffinger meint, sondern weil die Wirkungen getrennt wirkender Kräfte kleiner sind, als die zugleich wirkenden Kräfte; denn in diesem Falle sind Am, An kleiner als Ap, Aq. Und ähnlich ist es, im Falle BAC stumpf sein sollte.

So könne man also mit Hilfe des Leibnitz'schen Satzes das alte Gesetz der Zusammensetzung und Auflösung von Kräften beweisen durch eine ganz natürliche Methode und mit dem Satze von der Gleichheit der Wirkung und Ursache in Einklang bringen, was nach Cartesius unmöglich sei. Und das sei der Grund, warum ihm die Ansicht des letzteren immer bedenklich erschienen sei, weil sie einem metaphysischen, völlig klaren Prinzipe widerspreche.

Riccatus wendet seine Methode noch auf die Sätze vom Gleichgewichte, dem Hebel und aufs Pendel und zeigt, dass mit Hilfe derselben auch deren Richtigkeit erwiesen werden könne, was übrigens übergangen werden möge. Zweifellos ist sie aber frei von einem Fehler der Methode Bülffingers, welchen Kant mit Recht gerügt hat. Die eine Bemerkung Riccatus' ist noch zu erwähnen, dass er sich nicht damit einverstanden erklären könne, dass die Anhänger des neuen Mafses aus der Gleichheit der Kräfte am Hebel geschlossen hätten, dass die toten Kräfte der Bewegungsgrösse gleich seien. Vielmehr seien eben hier bei einer unendlich kleinen Bewegung die Wirkungen zweier Kräfte gleich und auch die Bewegungsgrössen, letztere deswegen, weil die

virtuellen Geschwindigkeiten sich direkt wie die Hebelarme und umgekehrt wie die Massen verhalten; aber das eine hänge nicht vom anderen ab.

XXXVIII. Jakob Jurin, von welchem ich schon Seite 164 eine Arbeit mitgeteilt, veröffentlichte noch zwei weitere Abhandlungen; die eine in Nr. 476 der Philosophical Transactions 1745 unter dem Titel: An Inquiry into the Measure of the Force of Bodies in Motion: With a Proposal of an Experimentum crucis to decided the Controversy about it. Er schickt eine Geschichte des Streites bezüglich des Maſses der Kräfte voraus und spricht dabei die Ansicht aus, es seien nicht so fast die Fehlerhaftigkeit der Schlüsse, welche man aus den Resultaten der Experimente gezogen habe, an der Verschiedenheit der Maſse Schuld, als vielmehr die Verschiedenheit der Prinzipien, auf welchen jene Schlüsse fussen; was die eine Partei als Axiom anerkenne, verwerfe die andere völlig.

Er wendet sich dann speziell zur Untersuchung der Experimente, welche mit gespannten Federn angestellt wurden. „Wenn das eine Ende einer Feder sich gegen ein festes Hindernis stemmt und das andere gegen einen beweglichen Körper stösst, der die Feder bis zu einem gewissen Grad spannend seine ganze bewegende Kraft verliert, so kann die bewegende Kraft des Körpers als der Grund der Spannung der Feder angesehen werden und die Spannung der Feder als der Effekt dieser Ursache, welche bei dieser Erzeugung völlig verbraucht wird. Denkt man sich, zwei ungleiche Körper mit ungleicher Geschwindigkeit stossen auf zwei gleiche Federn und jeder von beiden spanne die Federn bis zum selben Grade, wobei die ganze bewegende Kraft verzehrt werde, so sagen die Leibnitzianer, es seien zwei gleiche Effekte erzeugt worden. Die Gegenpartei bestreitet dies aber, es sei denn, dass die Zeit in beiden Fällen dieselbe wäre, was aber in diesem Falle nicht eintreten könne.

Der Druck, welchen eine Feder auf einen Körper ausübt, kann als aus drei Effekten bestehend betrachtet werden, welche man für sich nacheinander betrachten kann: 1) Der Druck führt den Körper über einen gewissen Raum hin; 2) er gibt dem Körper eine gewisse Bewegungsgrösse; 3) er verleiht dem Körper eine gewisse bewegende Kraft. Der erste Effekt ist nur grösser, je länger der Druck dauert; ebenso verhält es sich mit dem zweiten Effekte; warum sollte also nicht auch der dritte Effekt grösser sein, wenn die Dauer eine längere ist? — Die Kraft aber, welche in der Feder sass, ist nicht die nämliche Kraft noch eine Kraft derselben Art, wie die, welche sich nachher im bewegten Körper befindet; jene ist tot, diese lebendig; nichts destoweniger ist die Kraft der gespannten Feder vollständig erschöpft durch die dem Körper erteilte bewegende Kraft; aber dies beweist nicht, dass dieselbe Feder bis zum selben Grade gespannt einem grösseren Körper nicht eine grössere Kraft erteilen könnte. Und darin liegt der Hauptpunkt des Streites.

Es ist klar, dass die Anhänger Leibnitzens nicht das Recht haben, zu sagen, ein Körper habe die und die Kraft, weil die und die Feder ihn in Bewegung setzte, indem sie selbst in Ruhe kam; denn dies kann den Streit nur noch schwieriger machen.“

Aus diesem Grunde schlage er (Jurin) eine ganz andere Methode vor, welche sich nur auf allgemein angenommene Prinzipien oder Axiome stütze oder wenigstens auf Sätze, welche man a priori niemals leugnen könne.

1. Axiom: Wenn eine Feder gegen einen Körper stösst, so hat sie ein um so grösseres Streben, sich auszudehnen, je grösser der Körper ist.

2. Axiom: Je mehr die Feder gespannt ist, desto grösser ist ihr Druck.

3. Axiom: Der grössere Druck erzeugt grössere bewegende Kraft in gegebener Zeit.

Daraus folgt als erste Behauptung, dass bewegende Kräfte nicht proportional sind den Massen der Körper und den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten.

Beweis: Man denke sich zwei gleiche und gleich gespannte Federn A und B, welche gegen zwei ungleiche Körper stossen und zwar möge A gegen den grösseren stossen; dann wird sich nach dem ersten Axiom A mehr spannen, als die andere; also wird nach dem zweiten der Druck von A in jedem Augenblicke grösser sein als der von B, folglich wird nach dem dritten die unendlich kleine bewegende Kraft, welche bei dem Drucke von A in einer unendlich kleinen Zeit erzeugt wurde, grösser sein als die von B; also wird auch die ganze bewegende Kraft, welche während der ganzen Zeit von A erzeugt wird, grösser sein als die von B in derselben Zeit erzeugte; oder die Kraft der grösseren Kugel wird grösser sein als die der kleineren in dem Momente, in welchem die kleinere Feder aufhört, auf ihren Körper zu wirken; aber die Feder A hört in diesem Augenblicke noch nicht zu wirken auf; also wird die bewegende Kraft von A jene von B mehr und mehr übertreffen. Aber Jedermann weiss, dass die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten in den zwei Kugeln gleich sind, also können die bewegenden Kräfte, von denen gezeigt wurde, dass sie ungleich sind, nicht proportional sein den Massen und Quadraten der Geschwindigkeiten.

Je grösser ein Körper ist, welcher von einer gespannten Feder getrieben wird, desto grösser ist die Kraft, welche er von derselben empfängt.

Um nun zu zeigen, dass die bewegende Kraft der einfachen Geschwindigkeit proportional sei, werden zwei weitere Axiome aufgestellt, nämlich 4) dass Federn von ungleicher Länge gleichen Druck haben, wenn sie ähnlich gespannt

sind und dass 5) gleiche Drucke in gleichen Zeiten gleiche bewegende Kräfte erzeugen.

Der Gedankengang des Beweises ist nun folgender: Man denke sich zwei ähnliche Federn mit den Längen 1 und 2, ähnlich gespannt; erstere schiebe eine Masse 2, letztere eine Masse 1; dann wollen sich beide Federn in der nämlichen Zeit ausdehnen und folglich die Feder 2 mit doppelter Geschwindigkeit wie die Feder 1; also will sie dem Körper 1 die doppelte Geschwindigkeit geben, als der Körper 2 von der Feder 1 erhält; also ist klar, dass während der ganzen Zeit ihrer Ausdehnung beide gleiche Spannung haben. Dann werden aber auch die Drucke immer gleich sein und also auch die unendlich kleinen bewegenden Kräfte, welche in unendlich kleinen Zeiten entstehen und also auch die endlichen Kräfte. Da aber die Massen sich wie 1 : 2, die Geschwindigkeiten wie 2 : 1 verhalten, so ergibt sich hieraus die Richtigkeit des Satzes. Man könne dies auch leicht allgemein beweisen.

Sollte übrigens noch ein Leser an der Richtigkeit dieses Beweises zweifeln, sagt Jurin, so wolle er ihm folgendes experimentum crucis vorlegen, von welchem er sich das Ende dieses Streites erhofft, und für das er eine klare und genügende Lösung mit seinem Beweise geben könne.

Auf einer horizontalen Ebene, welche sich aber durch die kleinste Kraft bewegen lässt, etwa auf einem Boote, das sich auf einem ruhigen Wasser befindet, sei zwischen zwei gleichen Kugeln eine Feder gespannt; dann ist klar, dass die Geschwindigkeiten und die bewegenden Kräfte beider Kugeln völlig gleich sein werden und dass das Boot, auf welchem sie liegt, in keiner der beiden Richtungen eine Bewegung erhält, wenn die Feder gegen die Kugeln stösst. Die Geschwindigkeit jeder Kugel sei 1, also auch ihre Kraft 1.

Nun werde der Kahn gleichförmig vorwärts bewegt in der Richtung der Länge der Feder mit derselben Geschwindig-

keit 1; in diesem Falle wird jeder von den Körpern die Geschwindigkeit 1 haben und die Kraft 1 wie oben und zwar beide in der Richtung der Achse der Feder. Die Geschwindigkeit der hinteren Kugel wird völlig aufgehoben und sie bleibt in absoluter Ruhe; die vorwärts laufende Kugel hat aber die Geschwindigkeit 2. Nach der Leibnitz'schen Lehre muss nun die Kraft dieser Kugel 4 sein; dann muss sie aber durch die Wirkung der Feder die bewegende Kraft 3 erhalten haben, denn sie hat ja vom Boote nur die Kraft 1. Ist dies möglich?

Gleiche Federn geben bei gleicher Spannung gleiche bewegende Kraft; in diesem Falle stimmen Leibnitzens und Jurins Theorie überein, weil die Kugeln gleiche Masse haben. Nun nehme man an, die Feder, welche zwischen den Kugeln liegt, sei in zwei gleiche Teile zerlegt; dann kann man die beiden Teile als zwei ganze Federn betrachten, gleich und gleich gespannt, von denen jede mit dem einen Ende der anderen Feder Gleichgewicht hält, mit dem anderen aber die Kugel zu bewegen strebt. Folglich müssen nach Leibnitzens Theorie die beiden Federn den beiden Körpern gleiche Kraft mitteilen. Die Kraft der einen Feder wird aber aufgehoben, die andere aber macht mit der des bewegten Schiffes 2 und nicht 4, wie die Leibnitzianer behaupten.

Also hat der Körper, welcher vorher die Geschwindigkeiten 1 und die Kraft 1 hatte, nun die Geschwindigkeit 2 und die Kraft 2; d. h. die Kräfte sind den einfachen Geschwindigkeiten proportional.

Eine weitere Arbeit dieses Gelehrten — principia dynamica, enthalten in No. 479 der Phil. Transact. 1746 — ist um so interessanter als sie uns mit dem Briefwechsel, welcher zwischen Leibnitz und Bernoulli stattfand, bekannt macht. Anknüpfend an jenes bekannte specimen dynamicum, von dem wir früher (S. 30) mitteilten, dass der versprochene zweite Teil ausblieb, habe Bernoulli im Juni desselben Jahres

Einiges gutgeheissen, aber das Leibnitzsche Kräftemafs in dem Grade nicht für gut befunden, dass er sogar wagte zu beweisen, die Kräfte bewegter Körper seien nicht den Quadraten sondern nur den einfachen Geschwindigkeiten proportional. Erst nach mehrfachem Briefwechsel habe er sich für Leibnitzens Ansicht gewinnen lassen. Die Mitteilung ist um so bemerkenswerter, wenn man bedenkt, welch eifriger Verteidiger dieses Mafses Bernoulli nachher geworden. Darauf habe Leibnitz einen aprioristischen Beweis mitgeteilt und zugleich den Grund angegeben, warum er ihn nicht eher bekannt gemacht. „Ich wollte nicht“, sagt er in einem Briefe im Januar 1696, „dass diejenigen dieses kleinen Lichtes der Wahrheit gewürdigt werden, welche jene Beweise, die den Wirkungen schwerer oder anderer wahrnehmbarer Körper entnommen sind, nicht, wie es billig ist, annehmen.“

Der Beweis, welcher erst nach 50 Jahren bekannt wurde, ist offenbar jener aprioristische, von welchem so oft die Rede ist; er lautet:

1) Eine Wirkung, welche in einfacher Zeit das Doppelte hervorbringt, ist virtuell doppelt so gross als eine solche, welche eben dieses Doppelte in doppelter Zeit erzeugt.

2) Eine Wirkung, welche in doppelter Zeit das Doppelte hervorbringt, ist formell doppelt so gross, als eine solche, welche in einfacher Zeit das Einfache erzeugt.

3) Also ist eine Wirkung, welche in einfacher Zeit das Doppelte hervorbringt, viermal so gross als eine solche, welche in einfacher Zeit das Einfache erzeugt.

4) Nimmt man statt des Doppelten das Dreifache, Vierfache u. s. w., so ergibt sich eine neunfache, sechzehnfache etc. Wirkung. Also verhalten sich gleiche und gleichzeitige Wirkungen gleicher Beweglichen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten oder die Kräfte in gleichen Körpern verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Juvin meint nur, er könne hinter diesem Beweise nicht einen Funken Wahrheit entdecken; auch Bernoulli habe Zweifel darein gesetzt. Dieser habe im Februar 1696 auf jenen Beweis Folgendes erwidert: Es scheine die virtuelle Bewegung mit der formellen verwechselt zu werden; denn es folge nicht, dass A das Vierfache von C sein müsse, wenn A virtuell doppelt so gross sei wie B, dieses aber nur formell doppelt so gross sei wie C und sein Beweis geht darauf hinaus, dass

1) die Wirkung, welche das Doppelte in einfacher Zeit hervorbringt, doppelt so gross ist als die Wirkung, welche virtuell eben dieses Doppelte in doppelter Zeit erzeugt.

2) Eine Wirkung, welche das Doppelte in doppelter Zeit erzeugt, ist nur einfach so gross, als diejenige, welche virtuell das Einfache in einfacher Zeit erzeugt.

3) Also ist die Wirkung, welche das Doppelte in einfacher Zeit erzeugt, nur doppelt so gross als die, welche das Einfache in einfacher Zeit erzeugt. Oder:

1) Die Wirkung, welche das Doppelte in einfacher Zeit erzeugt ist formell ebenso gross als diejenige, welche eben dieses Doppelte in doppelter Zeit erzeugt.

2) Die Wirkung, welche das Doppelte in doppelter Zeit hervorbringt, ist formell doppelt so gross wie diejenige, welche das Einfache in einfacher Zeit erzeugt. Also ist

3) die Wirkung, welche das Doppelte in einfacher Zeit erzeugt, doppelt so gross als die, welche das Einfache in einfacher Zeit erzeugt.

Man könne eben nur eine virtuelle Bewegung mit einer virtuellen, eine formelle mit einer formellen, nicht aber diese mit jener vergleichen.

Darauf erwiderte Leibnitz im März, es handle sich hier nicht um virtuelle oder formelle Bewegung, sondern die eine Wirkung sei doppelt so gross wie die andere, sei sie nun virtuell oder formell. Man müsse wissen, dass das, was formell doppelt ist, auch virtuell oder dem Maſse gemäss

doppelt ist. Wenn es sich also nur um die Kraft oder ihr Mafs handle, so sei keine Verwechslung von Grössen verschiedener Art vorhanden; denn virtuell doppelt nenne er, was nur virtuell sei; aber formell doppelt, was zugleich formell und virtuell doppelt sei.

Es sei nun nicht zu leugnen, meint Jurin, dass Leibnitz auf diese Weise den Einwurf Bernoullis völlig widerlegt habe; nur hätte er deutlich aussprechen sollen, mit Hilfe welcher Kraft oder welchen Mafses eine Wirkung, welche das Doppelte in einfacher Zeit erzeugt, zweimal so gross sei als eine solche, welche das Einfache in doppelter Zeit bewirkt. Denn dieses müsse man als ganz falsch ansehen.

Mit dieser Erklärung hob nun Leibnitz nicht bloss die Bedenken Bernoullis sondern er gewann ihn sogar für seine Ansicht; denn in einem Briefe im April 1696 sagt er, dessen Antwort habe ihn völlig befriedigt. Aber Jurin meint, er könne sich erst dann mit einverstanden erklären, wenn man ihm beweisen könne, dass das Durchlaufen von 2 Meilen in 1 Stunde doppelt so viel sei, als das Durchlaufen von 2 Meilen in 2 Stunden; er sehe zwar, dass das Durchlaufen im ersten Falle doppelt schneller vor sich gehe, aber er sehe nicht ein, dass es doppelt so gross sein sollte, weil ja in beiden Fällen derselbe Weg zurückgelegt werde.

Bernoulli habe die Sache wohl deshalb nicht weiter treiben wollen, weil Leibnitz sich mehr als gewöhnlich aufgeregt gezeigt habe. Leibnitz aber habe, unsicher darüber, welche Wirkung sein erster Beweis auf Bernoulli haben werde, noch einen anderen beigefügt.

„Bewegende Wirkungen (gleiche meine ich), desselben Beweglichen sind zusammengesetzt im Verhältnisse der unmittelbaren Effekte, nämlich der durchlaufenen Längen und der Geschwindigkeiten. Gleichzeitig durchlaufene Strecken sind aber zusammengesetzt im Verhältnisse der Zeiten und Geschwindigkeiten; also verhalten sich bewegende Wirkungen

einfach wie die Zeiten, aber quadratisch wie die Geschwindigkeiten, in gleichen Zeiten also, falls die Beweglichen ungleich sind wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten."

Zu diesem zweiten Beweise bemerkte Bernoulli im Juni desselben Jahres, er sei ebenso geschickt wie der erste und mehr nach der gewohnten Form; es müsste nur sein, dass man ausdrücklich wollte, die Geschwindigkeit sei eher Ursache als Wirkung. Und Jurin schliesst aus der letzteren Bemerkung, Bernoulli habe zwar scheinbar diesen zweiten Beweis zugegeben, in Wahrheit ihn aber verworfen; er habe ja auch seine Zustimmung an die Bedingung geknüpft, dass durchlaufene Strecke und Geschwindigkeit gegenseitig von einander unabhängig seien und nicht eines das andere in sich schliesse. Es sei unleugbar, dass der durchlaufene Weg von der Geschwindigkeit abhänge und deshalb sei jener Beweis nach dem Urteil Bernoullis falsch.

Auf diesen letzteren Einwurf habe auch Leibnitz in seinem nächsten Briefe vom Juni nur das Eine erwidert, er habe schon früher eine Wirkung nach dem gemessen, was sie hervorbringt, nämlich nach dem extensiven oder materiellen Effekt d. h. nach der Länge und nach dem intensiven oder formellen Effekt.

Damit habe er aber zu verstehen gegeben, dass er die Geschwindigkeit für einen Effekt halte, während Bernoulli sie als Ursache auffasste. Bezüglich des anderen Einwurfes aber, dass nämlich Weg und Geschwindigkeit von einander abhängen, schweige Leibnitz vollständig; auch sei davon in den späteren Briefen nicht mehr die Rede. Aber der erste Beweis sei für beide nicht ohne Bedenken gewesen; wenigstens habe sich Bernoulli in einem Briefe vom August geäussert, er wisse nicht, was Leibnitz unter dem Begriffe actio verstehe, von dem doch jener ganze Beweis abhänge; aber Leibnitz

habe keine Definition gegeben. Er habe nur in seinem Briefe vom Juni bemerkt, sein Beweis stütze sich auf die Annahme, die actio, welche etwas in einfacher Zeit hervorbringe, sei doppelt so gross, wie die, welche dasselbe in doppelter Zeit erzeuge. Also stehe und falle sein Beweis mit dieser Annahme. Und Leibnitz gebe selbst zu, dass er noch keinen aprioristischen Beweis für diese Annahme gefunden habe. Bernoulli habe auch sich nicht weiter mit diesem Beweise abgegeben. Aber Wolf habe denselben wieder aufgenommen (s. S. 79). Bemerkenswert sei hiebei, dass man erst beweisen müsse, dass $a = e \cdot v$. Daraus gehe hervor, dass Leibnitz auch damals (1710) noch keinen Beweis hiefür gefunden hatte.

Was nun seine (Jurins) principia dynamica betreffe, so habe er dieselben bereits im Januar 1733 der Akademie in Petersburg vorgelegt; sie seien auch von derselben angenommen, aber hierauf auffallender Weise verloren gegangen; die nunmehr der Akademie in London vorgelegten seien eine Ergänzung eines unvollständigen Exemplares des ersteren. Was er in der Wolfschen Dynamik für richtig gehalten habe, sei wörtlich aufgenommen, was darin mangelhaft war, ergänzt, Falsches aber verbessert. Wenn auch Wolf die Wahrheit selbst nicht gefunden habe, so habe er doch gezeigt, wie man zu ihr gelangen könne, und diesen Weg habe auch er eingeschlagen. Die Definitionen, Axiomata und Lehrsätze Wolfs habe er mit wenigen Ausnahmen angenommen, weil er glaube, sie nicht deutlicher geben zu können.

Ich unterlasse es deswegen, hier dieselben mitzuteilen und wende mich unmittelbar zu dem Falle, in welchem sich eine Abweichung von Wolfs Ansichten zeigt.

Das zehnte Theorem in dieser Schrift lautet: „Wirkungen, durch welche derselbe Effekt erzeugt wird, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten,“ mit der Bemerkung: „wenn dies

wahr ist, so muss man die Leibnitzsche Lehre annehmen, ausserdem sie verwerfen.“ Wolf teile den Beweis desselben in drei Teile; da aber der zweite und der dritte vom ersten abhängen, so wolle er nur diesen untersuchen.

Wolf sage dort, es sei klar, dass eine einförmige Wirkung, welche in halber Zeit den ganzen Effekt erzeuge, doppelt sei. Wie, wenn man aber dies leugne? Wenn man sage, die Wirkung sei immer die nämliche, in welcher Zeit sie auch einen Effekt erzeuge? Das sei gerade jene Annahme Leibnitzens, für welche derselbe keinen aprioristischen Beweis habe finden können. Er (Jurin) sage, jene Annahme sei nicht klar und damit stürze der ganze Wolfsche Beweis.

Vor allem aber sei zu untersuchen, was man unter actio verstehe und was unter effectus. Auch Wolf habe für erstere keine Definition gegeben. Die Definition aber, welche Wolf vom Effekt gegeben habe, wolle er auch von der Aktion geben; denn zwischen beiden sei nur der Unterschied, dass die Aktion ein entstehender Effekt und der Effekt eine vollendete Aktion sei; erstere sei etwas, mit Hilfe dessen etwas erzeugt wird, letztere aber das, was erzeugt wird.

Daher laute sein zehntes Theorem: Bei gleichen Aktionen sind die Effekte gleich und sein eilftes: Aktionen verhalten sich wie Effekte. Daraus ergebe sich aber als zwölftes, dass die Kräfte sich verhalten wie die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten. Denn nach einem auch von Wolf anerkannten Lehrsatze verhielten sich Aktionen wie die Produkte aus Zeiten und Kräften; also stünden auch die Effekte im nämlichen Verhältnisse. Die Effekte aber verhielten sich wie die Produkte aus Massen und Wegen, also seien die Produkte aus Zeiten und Kräften denen aus Massen und Wegen proportional und daraus folge die Richtigkeit des zwölften Theorems. — Wir finden also hier auf rein mathema-

tischem Wege zwei ganz entgegengesetzte Ansichten bewiesen und können das Rätsel nicht lösen. Es wird sich später zeigen, dass die Entscheidung der Frage auf diesem Wege überhaupt nicht möglich ist.

## Sechster Abschnitt.

XXXIX. Im dritten Teile des zweiten Bandes der Comment. Bonon. finden wir eine Arbeit, welche wahrscheinlich als ein Vermittlungsversuch zwischen den beiden entgegengesetzten Ansichten aufgefasst sein will und deren Autor Roger Joseph Boscovich ist.

Zwei Arten von Kräften hätten schon die Alten unterschieden, die einen, welche bei der Bewegung entstünden, die anderen, welche ohne alle Bewegung vorhanden sein könnten; als Mafs beider Arten hätten sie die einfache Geschwindigkeit genommen. Für die einen lasse sich dieses Mafs leicht durch Experimente bestätigen; auch für die andere Art seien Beweise versucht worden aber mit Experimenten, welche mehrere nicht bekannte Umstände in sich schlössen, so dass sich aus ihnen nichts erkennen lasse; übrigens habe man bis zum Jahre 1686 auch für diese das bekannte Mafs angenommen. Da sei Leibnitz mit seinem neuen Mafse hervorgetreten, habe aber nicht gerade viele Anhänger gefunden, dafür um so mehr Gegner. Unter diesen habe Mairan (s. S. 123) die alte Anschauung gegen alle Geschosse der Gegner so verteidigt, dass man kein Experiment angeben könne, das sich mit dessen Methode nicht vereinbaren liesse. Diesen habe der Mathematiker Peter Martin (s. S. 180) in einem 1743 erschienenen Werkchen über die lebendigen Kräfte heftiger angegriffen, als billig war, möge er auch derselben Partei angehören; aber er habe dabei selbst sich eines Irrtums schuldig gemacht. Von jenem schon mehrfach erwähnten Experimente mit Kugeln, welche

aus verschiedenen Höhen auf einen weichen Körper fallen, sagt nämlich Martin: „Wenn es nötig wäre, würde ich schwören, dass dieses Experiment noch Niemand angestellt hat.“ Es sei nun gerade wunderbar, meint Boscovich, wie Martin einen solchen Ausspruch wagen könne. Aber ebenso wunderbar sei die Quelle zu einem solchen Selbstvertrauen. Martin habe nämlich dieses Experiment selbst auch gemacht und dabei gerade das Entgegengesetzte gefunden wie Mairan und Andere. Er habe nämlich gefunden, dass die Tiefe der Grübchen nahezu doppelt aber nicht viermal grösser wurde, wenn die Kugel aus der vierfachen Höhe fiel. Jene aber verstünden unter den Grübchen nicht bloss deren Tiefen, sondern die ganze verdrängte Masse; diese stehe aber, da sie die Gestalt eines Kugelsegmentes habe, im Verhältnisse der Quadrate der Tiefen, wenn letztere im Verhältnisse zum Kugeldurchmesser klein seien. Also habe Martin mit Unrecht jenen Vorwurf erhoben. —

Und nun kommt Boscovich zu dem gewichtigen Ausspruche: „Es gibt keine lebendigen Kräfte in den Körpern. Alle Erscheinungen hängen von der Kraft der Trägheit sowie von toten Kräften ab. Damit fällt der Streit um das Mafs der lebendigen Kräfte an und für sich.

Will man aber das Wort lebendige Kraft beibehalten, dann kann man dasselbe ebensogut auf das Produkt von Masse und Geschwindigkeit, wie auf jenes von Masse und Quadrat der Geschwindigkeit anwenden; dann wird aber der Streit nur ein Kampf um Worte. Wenn sie aber Jemand als nicht überflüssig erklären will, so ist das erstere Mafs vorzuziehen, weil es einfacher und der Natur entsprechender ist. Und damit wäre der Streit wiederum beigelegt.“ Diese Gedanken werden nun ausgeführt.

„Alle Mechaniker nehmen die Kraft an, welche Keppler zuerst Trägheit, Newton aber die eingepflanzte passive Kraft

genannt hat. Ferner kann Geschwindigkeit in zweifachem Sinne aufgefasst werden; einmal ist sie eine Beziehung zwischen Raum und Zeit und das andere Mal ist sie eine Bestimmung, welche ein Körper hat, einen bestimmten Raum in gegebener Zeit zu durchlaufen. Kraft ist eine Ursache, welche durch ihre Wirkungen den Zustand eines Körpers ändert. Eine momentane Wirkung ist eine aktive Kraft, für uns die einzige Kraft, nach Leibnitz tote Kraft.

Mögen nun hier auch die Worte Wirkung und Erzeugung gebraucht werden, so bedarf es doch keiner wahren und physischen Aktion oder Produktion, um eine Geschwindigkeit im zweiten Sinne zu erzeugen, wie ja auch die Geschwindigkeit nach der angegebenen Anschauung nichts ist, was physisch erzeugt würde und von neuem dazukäme. Sie gilt als überflüssig nach dem Gesetze der Trägheit, dem der Kraft und dem Umstande des Ortes. Deshalb möge es also für die Zukunft gestattet sein, anzunehmen, dass zur Erzeugung einer Geschwindigkeit eine lebendige Kraft nicht nötig ist.

Wir fassen die Kräfte meist als fortwährend wirkend auf; sie erzeugen in den einzelnen Zeitteilchen einen einzigen Druck, der sich in Geschwindigkeit umsetzt nicht durch eine Multiplikation, sondern lediglich durch die Fortsetzung in der kontinuierlichen Zeit, geradeso wie eine Fläche nicht durch Vermehrung einer Linie, sondern nur durch kontinuierliche Nebeneinanderreihung anderer Linien entsteht. Aber die Undurchdringlichkeit, wie sie beim Zusammenstosse fester Körper vorhanden ist, erzeugt im Momente desselben Geschwindigkeit und deshalb ist die Kraft beim Stosse höherer Ordnung und kein blosser Druck, mag er auch noch so vermehrt werden, kommt ihr gleich, ausser er wird während einer kontinuierlichen Zeit fortgesetzt. Eine Geschwindigkeit hängt also immer ab vom Drucke und von der Zeit desselben.“ Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten erklärt

Boscovich in der bekannten Weise, dass nämlich bei schiefem Winkel die auf der Diagonale senkrechten Komponenten sich aufheben.

Dies vorausgesetzt geht nun Boscovich dazu über, zu zeigen, in welchen Punkten er mit den herrschenden Ansichten übereinstimmt, in welchen nicht. Die Wirkung jener Kräfte, durch welche ein Druck erzeugt wird, misst er, wie Leibnitz die toten Kräfte; und dieses Maſs hält er für vernunftgemäss. Ihre Wirkung erzeugt aber nach seiner Ansicht nichts anderes als nur diesen Druck und Geschwindigkeit.

„Bei der gleichförmigen Bewegung lassen sich die Erscheinungen durch die Kraft der Trägheit erklären. Und sollte Geschwindigkeit durch die Wirkung von Kräften erzeugt werden, von denen man annimmt, dass sie ohne irgend welche Berührung wirken und ohne Stoss an einen anderen Körper, wie z. B. die Schwere auch auf Körper im leeren Raume wirkt, so bedarf man wieder keiner lebendigen Kraft. Wenn ein Körper mit doppelter Geschwindigkeit zu vierfacher Höhe steigt, so kann er dies ohne irgend welche Notwendigkeit einer vierfachen lebendigen Kraft; er steigt nämlich solange, bis die doppelte Geschwindigkeit entgegengesetzt der mitgeteilten entsteht, welche die mitgeteilte vernichtet und die Bewegungsrichtung umkehrt. Was jener Aufstieg von der positiven Bewegung her hat, hängt allein von der Kraft der Trägheit ab, welche die vorige Geschwindigkeit aufrecht erhält; was die Negation der letzteren Bewegung betrifft, so kommt sie von der Schwere her, welche aber erst in vierfacher Höhe doppelte Geschwindigkeit erzeugt. Nähme die Schwere im einfachen Verhältnisse der Entfernung ab, so würde die Geschwindigkeit in der doppelten Höhe die doppelte sein. Beide Erscheinungen hängen nur von der Summe der Geschwindigkeiten ab, welche die Kräfte in gleichen Zeitteilchen sich selbst proportional hervorbringen

und der Summe der Wege, welche in denselben durchlaufen werden.

Auch beim Zusammenstosse von Körpern, bei welchen das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung als allgemein giltig vorausgesetzt wird, ist lebendige Kraft überflüssig; denn wenn wir die Undurchdringlichkeit wie eine Kraft auffassen, welche nach den gewöhnlichen Gesetzen wirkt, wenn auch sprungweise in Folge der Natur der Härte, so kommen zwei Kugeln, deren Massen ihren Geschwindigkeiten reciprok sind, auch ohne lebendige Kraft zur Ruhe." Boscovich führt nun Beispiele an, in welchen gezeigt werden soll, dass durch blosse Erzeugung von Geschwindigkeit alle Erscheinungen beim Stosse fester Körper ohne irgend welche Notwendigkeit lebendiger Kräfte erklärt werden können, welche aber hier mitzuteilen zu weit führen würde.

Auch das sei klar, auf welche Art bei elastischen und festen Körpern jenes Dazwischentreten der Teilchen und jene Aushöhlung der Grübchen entstehe. Im Momente der Berührung ändere sich nur die Geschwindigkeit der dem Berührungspunkte nächst gelegenen Teilchen, bis allmählich alle Teilchen die gleiche Geschwindigkeit erlangten. Wegen jener Ungleichheit der Geschwindigkeit näherten sich die Teilchen einander mehr und daher komme die Änderung der Gestalt, die sich bei elastischen Körpern wiederherstelle, nicht aber bei unelastischen. Hieraus erklärten sich auch jene Erscheinungen, welche von den Leibnitzianern zum Beweise der Existenz lebendiger Kräfte angeführt würden. Ebenso liessen sich damit die von Polenus, Mairan und Martin angegebenen Experimente erklären; denn die Oberfläche eines Segments verhalte sich wie der sinus versus. Vierfach sei zwar die Masse, welche bei doppelter Geschwindigkeit zusammengedrückt werde; aber deshalb werde nicht auch die vierfache entgegengesetzte Geschwindigkeit erzeugt; die Wirkung sei aber deshalb nur die doppelte, weil die

Wirkungen der einfachen Kraft sich nur in halber Zeit ergäben. Dass übrigens die Aushöhlung der Grübchen nicht von der lebendigen Kraft der Kugel abhänge, ergebe sich auch daraus, dass dasselbe Grübchen erzeugt werde, wenn die weiche Masse auf die Kugel falle. Der lebendigen Kraft dieser Masse könne man aber die Wirkung deshalb nicht zuschreiben, weil ja die lebendigen Kräfte darnach strebten, die Bewegung aller Teilchen zu erhalten, nicht sie zu vermindern.

Nirgends habe sich also eine Notwendigkeit lebendiger Kräfte erwiesen; alle Bewegungen liessen sich mit Hilfe einfacher Prinzipien erklären.

Wenn aber Jemand die lebendigen Kräfte zulassen wollte, so könne er das thun; wenn er nämlich behaupte, dass jene Kräfte, so oft sie in den einzelnen Zeitteilchen Geschwindigkeiten erzeugten, welche ihnen proportional sind, auch proportionale Kräfte erzeugen, so würden sich jene Kräfte verhalten wie die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten. Wollte er aber, dass in den einzelnen zurückgelegten Wegen Grade von lebendiger Kraft erzeugt werden, welche den erzeugenden Kräften proportional sind, dann würden sich die Aggregate jener Kräfte verhalten wie die Produkte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten.

Aus den Erscheinungen lasse sich die Falschheit keiner von beiden Ansichten erweisen; die erstere sei jedoch mehr der Einfachheit und Analogie der Natur konform. Bei der entgegengesetzten Ansicht könne auch die kleinste Kraft durch eine grosse Geschwindigkeit zur grössten Kraft erhoben werden, die in der kürzesten Zeit zu erzeugen wäre und zwar zu einer viel grösseren als die grösste Kraft in der längsten Zeit. Endlich müssten, wenn die toten Kräfte durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit gemessen würden, auch die lebendigen, wenn es gleich gut gehe, so

gemessen werden; und es gehe; denn was von den Kräften, welche Geschwindigkeit erzeugen, gesagt worden sei, bleibe richtig, wenn man es von Kräften sage, welche Wirkungen hervorbringen und wenn man die Summe sowohl derjenigen nähme, welche erzeugt würden, als derjenigen, welche verloren gingen. Sollten übrigens auch die Quadrate der Geschwindigkeiten die Grösse der Kräfte genügend ausdrücken, so seien sie doch nicht im stande, ihre Richtung anzugeben; ja, da die lebendigen Kräfte sowohl positiv als negativ sein müssten, so müsste ihre Summe, wenn sie konstant wäre, so bleiben, dass die positiven die negativen verminderten und umgekehrt; das sei aber nach Leibnitzens Ansicht nicht möglich, wohl aber nach der der Cartesianer.

Diese zuletzt ausgesprochene Idee hat für den ersten Augenblick in der That etwas Verblüffendes; sie ist aber, wie eine kurze Überlegung zeigt, für unsere Frage ganz und gar nichtssagend. Denn denken wir uns zwei Körper mit beliebigen Massen und beliebigen Geschwindigkeiten, welche in beliebiger Richtung aufeinanderstossen, so kann wohl die Frage aufgeworfen werden, in welcher Richtung sich der eine und der andere für sich bewegen und diese Frage hängt nur von der Bewegungsgrösse ab; die Gesamtkraft aber bleibt dieselbe, mögen sich beide Körper nach dem Stosse in derselben oder in entgegengesetzter Richtung bewegen wie vor dem Stosse; die Grösse dieser Kraft ist also von der Richtung ganz unabhängig; es handelt sich dabei ja nur um eine Übertragung derselben von einem Körper auf den anderen. Wollte man übrigens die Richtung, in welcher diese Übertragung vor sich geht, dennoch angeben, so wäre dies auch dann noch möglich, wenn das Quadrat der Geschwindigkeit als Maſs der Kraft angenommen würde, deswegen, weil eben jene Richtung nur von der ersten Potenz der Geschwindigkeit abhängt, nicht von ihrem Quadrate.

Sollte übrigens das nicht zugegeben werden, so frage

ich weiter: Warum sollte man nicht das Recht haben, zwei Kräfte, welche in entgegengesetzter Richtung wirken, mit verschiedenen Zeichen zu versehen; als ob ein Quadrat — $a^2$ — nicht ebenso gut positiv als negativ sein könnte, ebenso wie eine erste Potenz!

Dieser Einwurf schadet also dem Leibnitzianischen Mafs am allermindesten.

Wie wenig Boscovich in den Geist der Sache eindrang — wir können uns beim Lesen seiner Schrift dieses abfälligen Urteils nicht erwehren — möge man aus folgender Stelle erkennen:

Wenn man die Wirkung eines Körpers als von ihm selbst hervorgebracht ansähe, ohne irgend welche Rücksicht auf Kräfte, von welchen sie abhinge, so könne man die Disposition derselben, ein Grübchen auszuhöhlen, seine lebendige Kraft nennen; aber ebenso gut auch die Disposition, eine gleichförmige Bewegung zu erzeugen, so dass man die lebendige Kraft bald mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, bald mit der ersten Potenz derselben messen könne. Wolle man aber den Ausdruck so nicht gebrauchen, so müsse man über den Namen eine Untersuchung anstellen; aber auch da müsse man eher der alten Ansicht beipflichten als der neuen und es sei gar kein Grund vorhanden, warum Leibnitz, wenn er nur um die Änderung eines Namens kämpfe, sich so gewaltig brüste (!) als ob er irgend einen gewaltigen Irrtum der Mechaniker entdeckt hätte!!

Was weiter folgt, lässt sich mit kurzen Worten sagen: Alles, was sich, wie nämlich Boscovich meint, mit lebendigen Kräften und dergleichen nicht erklären lasse, könne man mit Hilfe seiner Theorie, zufolge deren die Körper mit Attraktiv- und Repulsiv-Kräften ausgestattet seien, — eine Theorie, die bekanntlich damals durchaus nicht mehr neu war, sondern schon von Newton aufgestellt wurde, — als richtig darstellen. Nach reiflicher Überlegung sei er zu der Ansicht gekommen,

dass Bewegungsänderung nie durch einen Stoss, sondern immer durch Kraft erzeugt werde, die in gewisser Entfernung wirke. Freilich muss er zugeben, dass sich auch seine Ansicht durch Experimente nicht feststellen lasse. Wir übergehen diesen Teil; er hat ja mit unserer Frage wenig oder nichts zu thun.

Nur das Eine möchten wir bemerken, dass uns dieser zweite Teil einen ganz gewaltigen Widerspruch gegen den ersten zu enthalten scheint; oder hat sich Boscovich dort nicht alle Mühe gegeben, alle Erscheinungen mit Hilfe des Trägheitsprinzips allein zu erklären? Diese allein scheint also doch zur Erklärung nicht zu genügen; wozu bedürfte es sonst der Attraktiv- und Repulsivkräfte? — Eine Entscheidung in dem grossen Kampfe zwischen Cartesianern und Leibnitzianern dürfen wir aber von Boscovich schon deshalb nicht erwarten, weil er den Begriff der lebendigen Kraft im Sinne Leibnitzens nicht klar genug erfasst zu haben scheint, weil er dieselbe einfach negiert.

XL. Mit einem wahren Gefühle der Befriedigung lesen wir dagegen eine Abhandlung des Professors Heraklit Manfred, welche dieser in den Comment. Bonon. Tom. II. P. III. im Jahre 1747, also fast gleichzeitig mit Boscovich unter dem Titel de viribus ex elastrorum pulsu ortis der Öffentlichkeit übergab. Es ist immerhin ein Zeichen festen Siegesbewusstseins, wenn man es wagt, den Gegner mit dessen eigener Waffe zu bekämpfen; und damit beginnt Heraklit Manfred, indem er aus dem Theoreme Bernoullis das der Cartesianer abzuleiten sucht.

Man denke sich zwei Reihen von Federn genau unter denselben Voraussetzungen wie Bernoulli sie in seiner ersten Arbeit (siehe pag. 62) aufgestellt hatte. Dann verhalten sich die Drucke — sagt Heraklit — mit welchen die Federreihen auf das Bewegliche wirken, wie die Zahlen der Federn in beiden Reihen; dann verhalten sich die Kräfte, welche das

Bewegliche von beiden Seiten erhält, wie die einfachen Geschwindigkeiten, die den homogenen Drucken entsprechen, und nicht wie ihre Quadrate. Dies soll nun bewiesen werden unter der Voraussetzung, welche die Cartesianer von Bernoulli selbst entleihen und welche Bernoulli im 7. Kapitel des oben citierten Werkes dargelegt hat; denn wiewohl Bernoulli dort gerade das Gegenteil beweist, haben dennoch die Cartesianer diesen Beweis zu dem ihrigen gemacht, indem sie ein einziges Wörtchen hinzufügten, was sie mit Recht thun zu können glaubten. Sie sagen nämlich unter Beibehaltung der Seite 68 angegebenen Bezeichnungen folgendermassen: Da AC : CG = BD : DH, so oft die Endpunkte der Federreihen zu den Punkten G und H gekommen sind, so werden beide Reihen immer gleich weit geöffnet sein; also wird bei jeder einzelnen Feder der gleiche Teil an Elasticität verloren sein, ein anderer gleicher Teil zurückbleiben; der Druck einer jeden Feder auf die Kugel wird bis hieher der gleiche sein. Bezeichnet man also den Druck, welchen die Federreihe in D ausübt mit p, so ist der entsprechende Druck in G nun np. Die Geschwindigkeitszunahme in H ist nach Angabe der Leibnitzianer selbst $\frac{p\,dx}{u}$; also $\frac{1}{2}u^2 = \int p\,dx$; ebenso ist in E: $dz = \frac{n^2 p\,dx}{z}$: also $\frac{1}{2} z^2 = n^2 \int p\,dx$; und demnach $u^2 : z^2 = \int p\,dx : n^2 \int p\,dx = 1 : n^2$; d. h. $u : z = 1 : n$. Also verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Kräfte, welche die Kugeln von den Federreihen erhalten, was auch die Ansicht der Cartesianer ist. Bernoulli hatte aus denselben Voraussetzungen geschlossen, dass $u^2 : z^2 = 1 : n$; der Grund dieser Verschiedenheit der Resultate liegt darin, dass, während die Anhänger Leibnitzens die Drucke in G und H mit p bezeichnen, die Cartesianer p und $n \cdot p$ dafür setzen, letztere indem sie diese Drucke der Zahl der Federn proportional setzen.

Der Kalkul ist den beiden Anschauungen gleich günstig; es ist nun zu entscheiden, welcher von den beiden analytischen Ausdrücken mehr der Wahrheit entspricht; es ist festzusetzen, ob die Drucke der Federreihen sich wie die Zahlen der Federn verhalten oder nicht. Heraklit teilt die Gründe für die eine und die andere Theorie mit, ohne jedoch selbst ein Urteil darüber zu fällen.

Dass der Druck bei zwei gleichen Federreihen, die unter gleichem Winkel geöffnet sind und unbeweglich bleiben, der gleiche ist, nehmen beide Parteien an. Die Leibnitzianer aber ziehen den weiteren Schluss, dass die Drucke auch noch die gleichen bleiben bei den unendlich kleinen Ausdehnungen, welche sie beim ganzen Verlaufe der Ausdehnung der Reihe selbst erlangen; denn da eine beliebig kleine Ausdehnung mit einer Bewegung verknüpft ist, so klein, dass sie gleich 0 gesetzt werden kann, so werden beide Reihen bei den einzelnen Öffnungen als ruhend betrachtet und deshalb die Drucke gegen die Kugeln für gleich angesehen werden können. Dagegen sagen die Cartesianer, dass diejenigen Kräfte, welche mit einer Bewegung verknüpft sind, mögen sie auch noch so klein sein, überhaupt anderer Art seien, als diejenigen, welche ohne Bewegung wirken; deshalb gelte die Gleichheit der Drucke zweier Federreihen, sobald diese eine Bewegung hervorrufen, nicht mehr. Ruhe und Bewegung seien zwei Zustände der Körper, zwischen denen es keinen dritten gebe. Da nun unendlich kleine Geschwindigkeiten durch Wiederholung schliesslich doch eine endliche Geschwindigkeit erzeugen, niemals aber eine Ruhe, so sei die unendlich kleine Geschwindigkeit etwas von der Ruhe Verschiedenes und deshalb auch vom Drucke, der ohne Bewegung geschieht. Das sei also der erste Grund, weshalb man die Gleichheit der Drucke nicht annehmen könne. Ferner sagen sie: Wenn eine beliebig lange Reihe von Federn in Ruhe bleibt, so wird kein anderer Druck ausgeübt als der, welchen eine

Feder ausübt, weil der Druck aller übrigen durch die gleiche Wirkung und Gegenwirkung aufgehoben wird. Sobald aber das Gleichgewicht aufgehoben wird, müssen sich die einzelnen Federn, aus welchen die ganze Reihe besteht, alle gleichzeitig öffnen, da sich ja kein genügender Grund denken lässt, warum nicht in jeder beliebigen Feder die erste Öffnung stattfinden sollte, wenn sie einmal in einer stattfindet. Daher wird auch die Dilatation der Reihen AC und BD sowohl in den einzelnen Öffnungen, als auch bei allen miteinander gleichzeitig sein. Und das könnte offenbar nicht geschehen, wenn nicht die beiden Kugeln, die von den Reihen bewegt werden, gleichzeitig ebensoviel Wege durchliefen, als in der sie bewegenden Reihe Federn enthalten sind; daher der Schluss, dass die Drucke dieser Reihen sich verhalten wie die Zahlen der Federn, also wie 1 : n. Dann sind aber auch die Geschwindigkeiten der Ausdehnungen in beiden Reihen ungleich.

„Ich sehe nicht ein,“ sagt Heraklit, „dass diejenigen, welche die Drucke für gleich ansehen, wie die Anhänger Bernoullis, nicht auch die Geschwindigkeiten gleich setzen. Es gibt solche, welche annehmen, die Geschwindigkeiten, mit welchen die Reihen sich ausdehnen, könnten bei gleichem Drucke unmöglich gleich sein; diese scheinen sich zumeist darauf zu stützen, dass sie meinen, eine kleinere Reihe dehne sich in kürzerer Zeit aus als eine grössere, und diese erteile wegen der grösseren Anzahl von Drucken, welche in der längeren Zeit ausgeübt werden, eine grössere Geschwindigkeit. Diese Philosophen gehen aber noch weiter, indem sie behaupten, die Zeiten, welche zu den Öffnungen der Reihen nötig seien, verhielten sich wie die Wurzeln aus ihren Längen. Allein das Alles hat mit sehr vielen Schwierigkeiten zu kämpfen; denn wer sähe nicht ein, dass wegen der Zeitdauer allein die Geschwindigkeit unmöglich vermehrt werden könne, solange die Ursache der Geschwindigkeit nicht vermehrt wird.

Denn wenn etwa zwei gleiche Kugeln auf einem horizontalen Tische von zwei gleichen Hämmern ungleich lange getroffen werden, so wird kein Mensch annehmen, dass die länger geschlagene Kugel deshalb eine grössere Geschwindigkeit erlange.

Wenn ferner der Druck, welchen die Reihe AC in G ausübt, wegen der grösseren Dauer eine grössere Geschwindigkeit erzeugt, als diejenige, welche BD in H erzeugt, so wird die Kugel an der Reihe AC schneller sein, als die an BD; denn die Kugeln können nicht auf gleiche Weise gedrückt werden; denn wenn auch nach Ansicht der Bernoullianer die beiden Reihen in homogenen Punkten gleiche Drucke ausüben, so werden doch die Kugeln diese Drucke nicht auf gleiche Weise aufnehmen, weil ja die eine, da sie schneller ist, sich schneller dem Drucke entzieht. Und doch sollten die Kugeln in homogenen Punkten gleichmässig gedrückt werden!

Da ausserdem für die erwähnte Ungleichheit der Zeiten bei den Öffnungen elastischer Reihen bis jetzt von den Anhängern Leibnitzens kein genügender Beweis beigebracht wurde, so fragen die Cartesianer vor allem darnach, aus welchem Grunde Federn, deren Zahl auch ungleich sein kann, deren Bestreben zum Zurückspringen bei den einzelnen aber dennoch gleich ist, wenn sie einzeln zurückspringen, dies sogleich bewerkstelligen und sich auch gleichzeitig öffnen, sobald sie aber zu Reihen verbunden werden, sich nicht alle gleichzeitig öffnen. Und wenn wir annehmen, dass sie gar keine Trägheit besitzen und dass sie an dem einen Ende durch kein Hindernis aufgehalten werden, so können sie sich auch gegenseitig nicht hindern und also ohne Grund langsamer werden, was dem Prinzipe vom hinreichenden Grunde widerspricht.

Mit vollem Rechte verlangen also auch die Cartesianer einen Beweis dafür, dass die Zeiten sich wie die Wurzeln

aus den Wegen verhalten sollen, was die Leibnitzianer aus jener Hypothese ableiten. Dem. Beweise, welchen letztere dem Beispiele der Schwere entnehmen, ist aber nicht ganz zu trauen; denn während es dort feststeht, dass die Geschwindigkeitszunahmen in gleichen Zeiten die gleichen sind, ist dies von den Federreihen noch nicht erwiesen, weshalb man auch nicht schliessen darf, dass bei beiden Arten von Bewegungen das Verhältnis der Zeiten das gleiche sei.

Welches aber auch dieses Verhältnis sein mag, das steht fest: so oft die Drucke, welche auf einen fallenden Körper ausgeübt werden, den Drucken eines anderen an Zahl und Grösse gleich sind, müssen auch die Geschwindigkeiten gleich sein; eine Ungleichheit der Geschwindigkeit ergibt sich aus der Ungleichheit der Drucke in ungleichen Zeiten.

Übertragen wir dies auf die Federreihen, so müssen nach der Ansicht der Leibnitzianer die Gesamtgeschwindigkeiten, mit welchen die Kugeln von den beiden obigen Federreihen getrieben werden, immer die gleichen sein; denn wenn sie konsequent bleiben wollen, so müssen sie zugeben, dass die Drucke der beiden Reihen an Grösse und Zahl gleich sind. Der Grösse nach geben sie es zu; sonst könnten sie ja nicht den Druck in homogenen Punkten mit demselben Symbol p bezeichnen; an Zahl aber müssen sie es zugeben, da es keine Öffnung in der einen Reihe gibt ohne entsprechende in der anderen. Also müssen sie die Gleichheit der Gesamtgeschwindigkeit zugeben, welches auch das Verhältnis der Zeiten sein mag.

Es möge hier nur ein Beweis angeführt werden, welcher jenem Theoreme der Leibnitzianer, als ob die Geschwindigkeiten bei gleichem Drucke ungleich sein müssten, widerspricht.

Gesetzt, die eine Reihe dehne sich in längerer Zeit aus als die andere und teile also ihrer Kugel eine grössere Geschwindigkeit mit als die andere; dann ist auch nach Ansicht der Leibnitzianer die Geschwindigkeit der Reihe dort eine

grössere wegen der Zuwüchse an Druck, welche der Grösse nach zwar denen der anderen Reihe gleich sind, der Zahl nach grösser wegen der längeren Dauer des Druckes. Sei nun J jener Punkt, in welchem die eine Reihe ihr Maximum an Geschwindigkeit erreicht, F derjenige Punkt, in welchem die andere Reihe ihre grösste Geschwindigkeit erlangt; dann wird jene Maximalgeschwindigkeit der einen Reihe irgend einer Geschwindigkeit der anderen Reihe gleich sein, welche vor dem Maximum dieser Reihe liegt; sei dieser Punkt R; dann ist der Druck in J und R mit dem nämlichen p zu bezeichnen; also sind R und J homologe Punkte und alle Federn beider Reihen haben in diesen Punkten gleiche Winkelöffnung; das ist ja aber unmöglich weil F der homologe Punkt zu J ist, nicht R; also können auch die Geschwindigkeiten in J und R nicht gleich sein und können in den Punkten der grössten Dilatation F und J nicht ungleich sein; also müssen gerade nach Ansicht der Leibnitzianer die Geschwindigkeiten in homologen Punkten gleich sein.

Daraus lässt sich aber ferner schliessen, dass zwei gleiche Federreihen, wenn sie ungleiche Massen bewegen, diesen Geschwindigkeiten mitteilen, welche den Massen reciprok proportional sind.

Man denke sich zwei gleiche Reihen etwa aus 3 Federn bestehend, an der einen die Kugeln A = 2 Pfd., B = 1 Pfd. an der anderen E = 4 Pfd. D = 2 Pfd., C und K seien die Schwerpunkte. Bernoulli lehrt nun selbst, dass die von den Beweglichen empfangenen Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie deren Massen verhalten und dass der Schwerpunkt während der ganzen Bewegung in Ruhe bleibe. Nennt man also die Geschwindigkeit von B etwa 1, so ist die von A $^1/_2$, ebenso verhält sich die von D zu der von E wie 1 : $^1/_2$. Die Reihen kann man so betrachten, als wären sie in C und K festgemacht; dann hat man also nach Ansicht der Bernoullianer zwei ungleiche Reihen CA, KD mit einer und

zwei Federn und gleichen Kugeln A und D. Also müssen nach ihrer Ansicht die Geschwindigkeiten gleich sein hier $^1/_2$. Vergleicht man nun auch noch die beiden Beweglichen, welche von der gleichen Federnzahl bewegt werden, z. B. B und D, ebenso A und E, so wird sich ergeben, dass sich ihre Geschwindigkeiten reciprok wie ihre Massen verhalten. Es scheint also, dass gleiche Reihen, wenn sie ungleiche Massen bewegen, diesen Geschwindigkeiten mitteilen, welche nicht den Wurzeln der Massen, wie die Leibnitzianer meinen, sondern diesen selbst reciprok proportional sind.“

Die Beweise Manfreds stützen sich auf den Satz, dass die Drucke verschiedener Federreihen der Zahl der Federn proportional seien, während Bernoulli und seine Anhänger diesen Druck bei jeder beliebigen Zahl von Federn gleich setzen, wenn nur die Elasticität der Federn die nämliche ist. Wir müssen nun gestehen, dass ein logischer Beweis für die Richtigkeit der einen Ansicht eben so grosse Schwierigkeiten in sich schliesst, wie eine solche für die andere; wenn also die Cartesianer den Anhängern Leibnitzens vorhalten, sie seien für ihre Theorie im Grunde genommen den Beweis schuldig geblieben, so könnten die letzteren den ersteren denselben Vorwurf machen. Die Philosophie ist eben hier, wie in so vielen Fällen, dem Experimente vorausgeeilt; aber auch das Experiment wird über diese Frage schwerlich eine befriedigende Antwort zu geben im stande sein; denn wer einigermassen mit physikalischen Arbeiten vertraut ist, wird zugestehen müssen, dass dem experimentellen Beweise mindestens ebensogrosse Schwierigkeiten entgegenstehen wie dem philosophischen.

Wir werden also, so gross auch die Summe von Geist und Erfahrung sein mag, welche auf diese Frage verwendet wurde, kaum zu einem anderen Schlusse gelangen als zu dem: Von Federreihen haben wir keine Lösung des Problems der lebendigen Kräfte zu erwarten. (s. S. 73.)

XLI. Trotzdem muss ich noch eine Arbeit erwähnen, welche auf demselben Wege zum Ziele zu gelangen sucht; denn einmal muss in der Geschichte der Entwicklung einer Idee jeder Gedanke, der sie unterstützt oder bekämpft, erwähnt werden, dann bietet aber die vorliegende Arbeit weit mehr als etwa bloss eine Untersuchung der Federreihen. Ihr Autor ist kein geringerer als der nicht minder als Dichter denn als Gelehrter berühmte Italiener Franciscus Maria Zanotti, der langjährige Sekretär der Akademie in Bologna. Die Abhandlung in Form eines Gespräches geschrieben ist in den Comment. Bonon. Tom. II. Pars III 1747 abgedruckt unter dem Titel de elastris.

Unter Feder versteht Zanotti wie Bernoulli einen Winkel mit gleichen Schenkeln, der, wenn er zusammengedrückt ist, die Fähigkeit besitzt, sich von selbst zu öffnen, sobald der Druck aufhört; von Masse und Gewicht ist dabei abgesehen. Eine Feder kann entweder auf beiden Seiten frei sein oder sich mit dem einen Ende an einen festen Widerstand stützen; im letzteren Falle bewegt sich der Endpunkt des freien Schenkels doppelt so schnell als in ersterem, weil er in der nämlichen Zeit den doppelten Weg zurückzulegen hat. Ferner nimmt Zanotti an, dass sich eine Feder oder eine Reihe kongruenter Federn so öffnet, dass die äussersten Schenkel während der ganzen Zeit der Öffnung über eine Gerade hinlaufen und dass im letzteren Falle sich alle Federn gleichzeitig öffnen, weil jede Feder, mag sie in oder ausserhalb einer Reihe sein, in derselben Zeit zu ihrer natürlichen Ausdehnung gelangt; die Geschwindigkeit der einzelnen Feder ist aber proportional ihrer Entfernung vom Anfangspunkte der Reihe, d. h. proportional der Länge der Reihe. Zanotti nennt eine Reihe frei, wenn ihre Endpunkte frei sind, befestigt, wenn sich das eine Ende gegen ein Hindernis stemmt.

Eine freie Reihe zerfällt immer in zwei befestigte; des-

halb gelten von den einen die nämlichen Gesetze, wie von den anderen, nur bewegt sich der Endpunkt einer freien Reihe unter sonst gleichen Umständen bloss mit der halben Geschwindigkeit des Endpunktes einer befestigten Reihe. Die Bewegungsgrösse einer bewegten Reihe ist ihrer Länge proportional, weil angenommen wird, dass die Geschwindigkeit einer beliebigen Reihe immer an derselben (sehr kleinen Masse) hafte, also die Bewegungsgrösse der Geschwindigkeit und demnach auch der Länge proportional sei. Eine Federreihe, welche eine Kugel vor sich herschiebt, überträgt all ihre Bewegungsgrösse auf diese; die Geschwindigkeit der Kugel ist dann der Quotient aus der Länge der Reihe und der Masse der Kugel. Die Zeit, während deren die Reihe sich ausdehnt, ist der Kugel reciprok proportional. Wäre aber die Geschwindigkeit der Kugel, wie Bernoulli meint $\sqrt{\frac{S}{Q}}$, wo S die Länge der Reihe, Q die Masse der Kugel bezeichnet, so müsste die Bewegungsgrösse $\sqrt{SQ}$ sein, was nicht gut möglich ist; denn bei konstanter Reihe müsste der grösseren Kugel eine grössere Bewegungsgrösse entsprechen; wie sollte aber dies sein können, da doch die Quelle dieser Grösse, nämlich die Reihe konstant bleibt? Ja nach dieser Annahme bliebe die Bewegungsgrösse konstant, wenn man nur die Kugel ebensovielmal vergrösserte als die Reihe kleiner werde, was doch unmöglich sei. Und dieser Einwurf Zanottis ist, wie wir gleich hier bemerken wollen, völlig gerechtfertigt; denn solange man auf rein mathematischem Wege die Gesetze der Federreihen untersuchen will, ist jeder andere Schluss als der Zanottis falsch; erst wenn sich nachweisen lässt — und das ist möglich, wie wir später sehen werden, — dass aus der Federreihe selbst während der Bewegung eine neue Kraft entsteht, lässt sich Bernoullis Annahme rechtfertigen.

Zanotti sagt ferner: „Wenn an den Endpunkten einer sich öffnenden freien Reihe zwei Kugeln sind, so werden beide Kugeln den gleichen Stoss erhalten und beide Kugeln werden während der ganzen Dauer der Ausdehnung der Reihe gleichmässig gestossen und jede Kugel erhält von der Reihe die gleiche Bewegungsgrösse“ — eine Behauptung, die sich vom rein mathematischen Standpunkte aus nach den oben erwähnten Voraussetzungen kaum bestreiten lässt, mag sie auch der Annahme Bernoullis völlig widersprechen und an sich unrichtig sein. Weiter: „Die von den Kugeln durchlaufenen Räume verhalten sich wie ihre Geschwindigkeiten; also verhalten sich diese umgekehrt wie die Massen der Kugeln. Die Kugeln bewegen sich so, dass ihr gemeinsamer Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Die Zahlen der Federn, welche auf eine Kugel wirken, verhalten sich wie die zwischen den Kugeln und ihrem gemeinsamen Schwerpunkte befindlichen Teile der Reihe, weil ja alle Federn in derselben Zeit die gleiche Ausdehnung erfahren.“ Es ist freilich schwer, einzusehen, wie die beiden Kugeln auf diese Weise von ungleichen Federreihen gleiche Bewegungsgrössen erhalten sollten. Das sucht nun Zanotti, wie er selbst sagt, nicht zu beweisen, sondern plausibel zu machen. „Die Kraft der ganzen Reihe ist ihrer Länge proportional; und die Bewegungsgrösse einer jeden Kugel ist auch der ganzen Reihe proportional; denn da die Bewegungsgrösse der Kugeln nach obigem die gleiche ist, so muss man annehmen, dass die eine Hälfte der Kraft auf die eine und die andere auf die andere Kugel wirke. Die Kraft einer jeden Kugel ist demnach dem Quotienten aus der Länge der Reihe und der Masse der Kugel proportional. Eine jede Kugel wird also durch eine Kraft getrieben, die eine feste Reihe von der halben Länge der freien Reihe ausüben würde. Sind also die beiden Teile der Reihe ungleich, so können diese nicht wie zwei feste Reihen betrachtet werden, welche durch eine in ihrem Teil-

punkte befindliche feste Wand geschieden wäre. Denn wenn es auch in jeder freien Reihe einen festen Punkt gibt, so kann dieser doch nicht mit einer festen Wand vertauscht werden, weil die Festigkeit des Punktes von der Kontinuität der Reihe und der Verteilung der Kräfte kommt, die Festigkeit der Wand aber nur von sich selbst abhängt, also die Verteilung der Kräfte aufheben kann. Deshalb haben auch diejenigen Unrecht," fügt Zanotti bei, „welche meinen, die Kräfte verhalten sich wie die Abschnitte der Reihe, weil trotz des festen Punktes diese Abschnitte aufeinander einzuwirken vermögen." — Es ist unendlich schwer, auf rein intellektivem Wege ein Urteil zu fällen, welcher von beiden Gelehrten — Bernoulli oder Zanotti — im Rechte sei; hier müsste eben ein Experiment, das freilich mit fast unübersteiglichen Hindernissen verbunden wäre, entscheidend eingreifen, wenn es nicht einen anderen Weg gäbe, diese Frage zur Entscheidung zu bringen. Aber immerhin können wir unser Interesse dem Ideengange dieser Männer nicht versagen, mag auch die Lösung der Frage durch reinen Vernunftschluss unmöglich sein. — (s. S. 74.)

Was nun die Körperkräfte selbst betrifft, so sagt Zanotti: Wenn man sage, dass bei einer freien Reihe AB, welche in die Teile MA, MB zerlegt zwei Kugeln treibt, die lebendigen Kräfte dieser Kugeln den Längen MA, MB proportional seien, so könne das zugegeben werden; denn da die Geschwindigkeiten der Kugeln durch MA und MB ausgedrückt seien, so müssten die lebendigen Kräfte, falls sie den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional seien, sich verhalten wie $P \cdot \overline{MA}^2 : Q \cdot \overline{MB}^2$, was aber in diesem Falle gleich sei MA : MB, weil $P \cdot MA = Q \cdot MB$. Aber von der lebendigen Kraft einer Kugel, welche von einer festen Reihe getroffen werde, könne man das nicht behaupten; denn in diesem Falle sei — abgesehen davon, dass, wie oben erwähnt, MA und MB nicht wie feste Reihen betrachtet werden

könnten — die Geschwindigkeit der Kugel $\frac{S}{Q}$, die lebendige Kraft aber wäre $\frac{S^2}{Q}$ und das sei der Reihe keineswegs proportional. Nun wisse er wohl, dass die Anhänger des neuen Mafses die Geschwindigkeit nicht in dieser Weise messen, sondern mit der Wurzel aus obigem Quotienten und zwar gerade deswegen, damit die lebendige Kraft der Reihe proportional würde; er würde auch deren Ansicht nicht bekämpfen, wenn sie treffende Gründe für die Richtigkeit derselben beibrächten. Ihre Annahme der Substantialität der lebendigen Kraft habe für ihn nicht den Wert, dass er das Mafs der Geschwindigkeit, das er aus den Gesetzen der Federreihen abgeleitet habe, ändern zu müssen glaubte. — Freilich können wir auch die Beobachtung nicht leugnen, dass eben einer möglicherweise nicht bewiesenen Hypothese eine andere ebensowenig bewiesene und wollen wir gleich sagen beweisfähige Hypothese entgegengestellt ist. —

Aus einer anderen Abhandlung Zanottis ist Folgendes erwähnenswert: Jede Feder hat kontinuierlichen Druck, kontinuierliche Ausdehnung, kontinuierliche Beschleunigung. Stemmt sich das eine Ende einer solchen gegen eine feste Wand, so wird dieses während der ganzen Dauer der Ausdehnung nur tote Kraft haben; das freie Ende aber hat lebendige Kraft, die sich fort und fort vermehrt, solange die Feder sich öffnet. Der erstere Endpunkt kommt also in Ruhe, sobald die Feder ihre natürliche Lage eingenommen hat, der letztere wird sich aber in Folge des empfangenen Stosses noch weiter bewegen. Bei einer Reihe von Federn besitzt demnach das Ende einer Feder, abgesehen von der ersten im Falle einer festen Reihe, immer zugleich tote und lebendige Kraft, wobei aber erstere der letzteren kein Hindernis bereitet.

Der äusserste Punkt einer Reihe, welche geschlossen ist,

übt denselben Druck aus, wie gross auch die Zahl der Federn sein mag. Die Geschwindigkeit aber, welche dieser Punkt bei der Ausdehnung der Reihe erlangt, ist der Zahl der Federn proportional; denn die letzte Feder muss den ganzen Weg der Reihe nach durchlaufen in derselben Zeit, in welcher die erste Feder einen bestimmten Weg und jede andere denselben Weg durchläuft.

Diese Annahme wurde von Mehreren insbesondere vom Abbé Camus (s. S. 117) bestritten; denn ein jeder Körper erhalte, sobald er aus der Ruhelage in Bewegung übergehe, eine Geschwindigkeit, welche dem Drucke, den er in der Ruhelage empfange, proportional sei. Die Drucke der Endpunkte verschiedener Reihen seien aber gleich, weil sie ja bis zum gleichen Winkel zusammengepresst seien; also müssten sie bei der Öffnung sofort gleiche Geschwindigkeit erlangen. Das erste bestreitet nun Zanotti deshalb, weil es doch nicht denkbar sei, dass aus einer toten Kraft sofort eine Geschwindigkeit entstehen sollte; selbst wenn man dies aber zugestehe, so sei es nur möglich, wenn es ausserdem nichts gebe, was den Druck vermehren oder vermindern könnte und das sei doch bei einer Federreihe durchaus nicht der Fall, weil ja der Druck aller folgenden Federn vorhanden sei. Und deshalb könne auch die Geschwindigkeit nicht dem toten Drucke proportional sein. Zanotti scheint hier bereits eine dunkle Idee dessen gehabt zu haben, was später Kant als unabweislich zeigte, dass nämlich während der Öffnung der Reihe in den Federn selbst eine Kraft entstehen müsse; denn wäre das nicht der Fall, so wäre es doch schwer einzusehen, was der Druck einer Reihe mit der Zahl der Federn zu thun haben sollte.

Zanotti meint ferner, nicht bloss die Anfangsgeschwindigkeit, sondern eine beliebige andere Geschwindigkeit sei auch der Länge der Reihe proportional und diese letzteren Geschwindigkeiten könnten nicht verschieden sein, wenn erstere

gleich seien. Dagegen sei nun freilich der Einwand erhoben worden, dass der Endpunkt der längeren Reihe, weil er den längeren Weg durchlaufen müsse, auch längere Zeit dem Drucke ausgesetzt sei und also grössere Geschwindigkeit erlangen müsse, so dass also diese dem Produkte aus Druck und Zeit proportional erscheine. Darauf erwidert Zanotti: Man müsse sich in acht nehmen, welche Geschwindigkeit hier gemeint sei; denn wiewohl die Bewegung des Endpunktes einer Reihe eine beschleunigte sei, so müsse man doch die Bewegung bei jeder einzelnen Ausdehnung als gleichförmig ansehen und dann sei das erwähnte Mafs falsch; dazu komme noch, dass die Zeiten, während deren die Reihen sich ausdehnen, nicht gleich seien, weshalb also dieses Mafs wiederum nicht richtig sein könne. —

Die Arbeit fesselt uns namentlich deswegen, weil sie Schritt für Schritt die Entwicklungen Bernoullis verfolgt, die sie zum grossen Teile als nicht haltbar zu widerlegen sucht, grossenteils nicht ohne Erfolg, wenigstens insoferne als die Bernoullianischen Beweise ihrer rein mathematischen Natur halber nicht genügend sind. Bernoulli hatte bekanntlich die Einwirkung eines Systems von Federn auf einen Körper untersucht und zwar bei verschiedener Zusammenstellung derselben und war zu dem Resultate gekommen, dass die dem Körper erteilte Geschwindigkeit die nämliche sei, sei es dass die Federn einzeln nach einander oder paarweise oder mehrfach übereinander aufgestellt seien und hatte dieses Resultat auf die Theorie der lebendigen Kräfte zurückgeführt. Zanotti kommt nun auf anderem Wege zum selben Resultate. Man denke sich zu dem Zwecke im ersten Falle vier nebeneinanderstehende, im zweiten zwei paarweise gruppierte und endlich vier übereinanderstehende Federn. Nimmt man aus jeder solchen Reihe nur eine Gruppe, so verhalten sich ohne Zweifel die Geschwindigkeiten wie $4 \cdot 2 : 1$; da sich aber die Gruppen wie $1 \cdot 2 : 4$ verhalten — es sind ja

vier einzelne Federn, dann zwei Paare und schliesslich eine vierfache Feder — so müssen die Geschwindigkeiten gleich werden. Damit liefert also Zanotti einen Beweis für die Richtigkeit des Leibnitzschen Maſses; denn hier handelt es sich nicht, wie oben, um eine Untersuchung der Bernoullianischen Beweise, sondern um eine Anwendung des als richtig erkannten Leibnitzschen Gesetzes. Zanotti scheint sich auch dieser Einsicht nicht verschlossen zu haben, denn an manchen Stellen seiner Arbeit spricht er von dem „jetzigen" Maſse der Kraft; er kann auch den Begriff der Substantialität der lebendigen Kraft nicht ganz verwerfen und scheint nur darüber nicht mit sich einig gewesen zu sein, ob denn lebendige Kräfte in der Natur wirklich vorhanden und notwendig seien. —

Etwas bedenklicher erscheint mir die Art und Weise, wie Zanotti die Frage, ob man beim Maſse der lebendigen Kräfte auf die Zeit Rücksicht nehmen müsse oder nicht, zu erledigen sucht. Nach Bernoulli müsse nämlich die Zeit ausser acht bleiben, während deren die Reihe sich ausdehnt und der Körper A seine lebendige Kraft erhalte. Auf diese Zeit nähmen aber auch die Cartesianer keine Rücksicht, da sie nicht die Zeit in Betracht zögen, während deren die lebendige Kraft erlangt werde, sondern diejenige, während deren die erlangte lebendige Kraft verloren gehe. Von der Zeit aber, welche die Cartesianer in Betracht zögen, spreche Bernoulli nicht.

Diese Entscheidung scheint mir nicht richtig zu sein. Die Cartesianer haben gar wohl die Zeit, welche zur Erlangung einer bestimmten lebendigen Kraft nötig ist, in Betracht gezogen; man denke nur an das oft wiederkehrende Beispiel vom freien Falle schwerer Körper; dagegen wüsste ich für die Zeit, welche beim Verbrauche lebendiger Kraft in Rechnung kommt, nur ein Beispiel, die Arbeit Mairans; sogar bei ihm ist von einem Messen

der Kraft durch die Zeit keine Rede. Die Entscheidung Zanottis ist demnach nicht stichhaltig.

Dass die lebendige Kraft in den von Bernoulli aufgestellten Fällen der Zahl der Federn proportional sei, will Zanotti nicht bestreiten; aber es scheint ihm fraglich, ob dies bei allen Federreihen gilt; er führt, um dies zu zeigen ein Beispiel an, kann uns aber damit weder für die eine noch für die andere Ansicht eine zwingende Überzeugung beibringen; er hält die lebendige Kraft nicht für eine konstante, sondern für eine variable Grösse, welche von der Proportion abweiche, wie ja auch die Geschwindigkeit — nach seiner Anschauung — je nach der Zahl der Federn eine verschiedene sei.

Gibt es nun in der Natur lebendige Kräfte oder nicht? Wenn man unter lebendiger Kraft die Bewegungsgrösse verstehe, welche durch eine Kraft entstehe, so sei kein Zweifel, dass eine solche in der Natur existiere. Wenn man ferner unter lebendiger Kraft eine solche verstehe, welche zur Bewegungsgrösse hinzugefügt werden müsse und dieser selbst proportional sei, so sehe er zwar nicht ein, wozu sie in der Natur nützen solle, doch wolle er sie noch zugeben. Wenn man aber die Kraft meine, welche zur Bewegungsgrösse hinzugefügt und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit gemessen werden müsse, so bezweifle er, ob es eine solche in der Natur gebe, mögen auch die Effekte der Kräfte dem Quadrate der Geschwindigkeiten proportional sein. Und wenn sie wirklich existierte, so bräuchte sie doch nicht substantiell und nicht kontinuierlich zu sein.

Die Substantialität sei aber von Bernoulli als Fundamentaleigenschaft aufgestellt worden. Es frage sich nun, welches die Effekte seien, die dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sind. Wege, welche die Körper durchlaufen und Grübchen, welche fallende Kugeln im Sande machen, laute die Antwort. Es scheine also, dass der Weg

selbst als Effekt genommen werde; wenn aber nun plötzlich die Schwere aufgehoben würde, ginge der Körper in gleichförmiger Bewegung unendlich lange fort; er werde also nur durch die Bewegungsgrösse bewegt, welche nach Aufhebung der Widerstände sich niemals vermindere. Wozu also noch eine lebendige Kraft und warum beanspruche man für den steigenden Körper eine solche, nicht aber für den fallenden? — Diese Einwürfe sind aber leicht zu widerlegen; denn der Weg freifallender Körper wird nur insoferne als Effekt genommen, als er ein Mafs der fortwährenden Stösse der Schwerkraft ist, nach deren Aufhebung, wenn es sonst keine Hindernisse mehr gibt, von einer Kraftwirkung keine Rede mehr sein kann. Dass aber ein steigender Körper keine lebendige Kraft haben sollte, ist nicht richtig; sie wird nur verzehrt bei der Überwindung der Widerstände, welche eben diese Schwerkraft dem steigenden Körper entgegenstellt. Das muss auch Zanotti einräumen; nur meint er, die Summe aller dieser Widerstände sei der einfachen Geschwindigkeit proportional und diese Summe sei der Effekt, der demnach nicht dem Quadrate der Geschwindigkeiten proportional sei, eine Behauptung, für welche Zanotti den Beweis schuldig bleibt. Wenn eine Kugel in ein Sandhäufchen falle, sagt er weiter, schiebe sie viele Teilchen desselben auf die Seite und überwinde deren Widerstand und das halte er für den Effekt. Um Grübchen zu erzeugen, brauche aber die Kugel nicht einmal über eine Höhe herabzufallen; also könne wenigstens der Anfang eines Grübchens auch ohne lebendige Kraft erzeugt werden, warum also nicht das ganze Grübchen? Darauf werden die Anhänger der lebendigen Kräfte mit vollem Rechte erwidern, dass der Körper durch das Eindringen in die weiche Masse, auch wenn er nicht aus einer Höhe herabfalle, lebendige Kraft erzeuge. Die hier ausgesprochenen Behauptungen Zanottis machen mehr den Eindruck von reinen Vermutungen, deren Richtigkeit weder

durch experimentelle noch durch logische Beweise gezeigt wird.

Von grösserem Werte scheint mir dagegen die dritte Abhandlung, in welcher das Theorem des Abbé Camus, welches wir Seite 117 mitgeteilt haben, untersucht wird. Zanotti greift nämlich dessen Behauptung an, dass sich die Geschwindigkeiten der über ähnliche und ähnlich liegende Kurven fallenden Körper wie die Wurzeln aus deren Höhen verhalten. Er könne das nur so lange zugeben, als beide Körper ihre Stösse von der nämlichen Schwerkraft erhielten, weil sonst die Höhen nicht mehr den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional seien. Das setze aber Camus voraus, indem er sage, die Stösse am Anfange der Kurven seien gleich und zwar deswegen, weil auch die Stösse der Federn am Anfange der Federreihen gleich seien. Er aber (Zanotti) habe gezeigt, dass das eben nicht der Fall sei, sondern dass sie sich wie die Zahlen der Federn verhielten (siehe oben). Ferner falle der ganze Beweis des Camus, sobald die Kurven nicht ähnlich und ähnlich liegend seien. Wenn aber jener meine, sie müssten dies sein, sobald die Geschwindigkeiten in entsprechenden Punkten proportional seien, so sei das nicht richtig; denn man könne Kurven konstruieren, die dieser Bedingung genügten und doch nicht ähnlich und ähnlich liegend seien; sie würden es nur dann sein, wenn irgend zwei entsprechende Winkel gleich seien. Wenn nun die Geschwindigkeiten, mit welchen die Kugeln von Federn getrieben die Linien Af und Cc durchliefen, sich wie $\sqrt{Af} : \sqrt{Cc}$ verhielten, dann seien die Winkel gleich; aber dieses Verhältnis könne Camus nicht voraussetzen, weil er sonst gerade das voraussetze, um was sich die Frage drehe; also sei sein Beweis zu verwerfen. Nun scheint mir aber Camus diese Voraussetzung nicht als eine notwendige gemacht zu haben, sondern er nahm eben ähnliche und ähnlich liegende Kurven deshalb, weil sie ihm die einfachsten

schienen, so dass also der Widerstreit Zanottis nicht stichhaltig erscheint. Die ganze Arbeit Zanottis kann uns also nur von Neuem in der Ansicht bestärken, dass das Problem der Federreihen, man möchte sagen, als ein unlösbares sich darstellt und dass von dieser Seite eine Lösung der Frage um das Mafs der Kräfte nicht zu erwarten ist.

XLII. Im nämlichen Bande der erwähnten Commentarii ist eine Abhandlung des bereits Seite 155 erwähnten Jakob Riccatus enthalten, in welcher er auf einem anderen Wege die Richtigkeit des Leibnitzschen Mafses zu beweisen sucht. Es sei ausser allem Zweifel, dass die Kräfte mit dem Quadrate der Geschwindigkeiten zu messen seien, wenn nur der kleinste Teil der ursprünglichen Kraft bei dem Stosse träger Körper verbraucht werde; deshalb stehe es auch ausser allem Zweifel, dass die Gegner derselben gerade dieses Prinzip aus allen Kräften bekämpfen werden. Newton habe bereits in seinen monumenta dasselbe als wahr anerkannt; und wenn er aus demselben die Konsequenzen nicht gezogen habe, so sei ihm dies, wie es ja oft den grössten Männern ergehe, entgangen. Er wolle nun die Richtigkeit dieses Prinzipes auf einem anderen Wege zeigen, nämlich mit Hilfe der Mitteilung der Bewegungen durch Attraktion. Es sollen die Gesetze dieser Übertragungen untersucht werden und dabei gezeigt werden, dass jedes andere Mafs der Kräfte als das Leibnitzens Widersprüche in sich enthalte.

Die erste Frage sei die, ob zur Ausdehnung einer elastischen Saite oder einer Feder Kraft aufgewendet werden müsse; wenn dies der Fall sei, so sei damit schon eine notwendige Bedingung zur Lieferung des Beweises gefunden. Um dies zu untersuchen, befestige man an einem Nagel A die Feder AB, an deren Ende das Gewicht C angebracht sei; dieses werde sich in beschleunigter Bewegung bis nach C senken und dann in Folge des erhaltenen Stosses in verzögerter Bewegung noch weiter bis nach D gehen und dort zur Ruhe

kommen. Weil aber dort die elastische Kraft das Übergewicht erlange, kehre sich die Abwärtsbewegung in einen Aufstieg um; der schwere Körper C steige also mit beschleunigter Bewegung wieder bis nach C und weiter mit verzögerter Bewegung nach B. Und so werde sich diese pendelartige Bewegung ins Unendliche fortsetzen, falls AB von absoluter Elasticität sei und die Bewegung in einem Raume vor sich gehe, der ihr kein Hindernis entgegensetze.

Weil aber dies auf der Erde nicht möglich sei, so werde die Bewegung nach einer gewissen Zeit aufhören und die Feder die Ausdehnung BC erleiden. Wenn ferner der Widerstand der Feder die Wirkung der Schwere nicht hinderte, würde der schwere Körper gerade so herabsinken, als wenn er frei fiele. Wenn nun das nicht der Fall sei, stehe es dann nicht fest, dass dies von der Wirkung und Gegenwirkung der Feder komme? Es sei festzuhalten, dass die Feder AB in ihrer natürlichen Lage den geringsten Widerstand gegen eine wenn auch sehr kleine Ausdehnung leiste; je mehr sie aber gedehnt werde, desto mehr widerstehe sie einer weiteren Ausdehnung, bis sie bei einer gewissen Spannung reisse. Daraus folge aber notwendig, dass eine Feder, welche an und für sich in Ruhe bleibe, nur durch eine von aussen wirkende Kraft ausgedehnt und zusammengedrückt werden könne.

Nun denke man sich eine Kugel A, welche mit einer steifen Feder C verbunden sei; sie bewege sich in einem unendlich verdünnten Raume mit der Geschwindigkeit v, indem sie eine Horizontale durchlaufe, während am anderen Ende der Feder eine in Ruhe befindliche Kugel B befestigt sei. Kugeln und Federn seien gewichtslos und das Verhältnis der Masse der letzteren zu dem der ersteren kleiner als jede beliebige Grösse, was ja die Festigkeit der Feder nicht aufhebe. Indem nun die Bewegung dem Körper B mitgeteilt werde, müsse die Feder eine Ausdehnung erleiden;

denn wäre dies nicht der Fall, so müsste B sofort die volle Geschwindigkeit von A erlangen, wodurch ein Effekt entstünde, der die Ursache weit überstiege; denn bei gleichen Geschwindigkeiten verhielte sich die erzeugte zur ursprünglichen Kraft wie A + B : A. Wollte aber Jemand behaupten, B werde mit Hilfe der Feder die Bewegung allmählich mitgeteilt, so ergäbe sich eine Wirkung ohne Gegenwirkung; also müsse unter den gegebenen Voraussetzungen die Feder eine Verlängerung erfahren und zwar so lange, bis beide Kugeln und die Feder sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegten. Zu dieser Verlängerung müsse aber ein Teil der ursprünglichen Kraft aufgewendet werden; denn da eine gemeinsame Bewegung auf die Wirkung der einzelnen Teile gar keinen Einfluss habe, so könne man eine Feder, welche zwischen zweien mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegenden Körpern sich befinde, betrachten wie eine solche, welche zwischen zweien ruhenden sei. Eine solche Feder müsse aber während sie zu ihrer ursprünglichen Lage zurückkehre, die Trägheit der beiden Körper überwinden, wozu sie einer Kraft bedürfe, deren Ursache nirgends gesucht werden könne als in der Kraft des Körpers A. Je grösser nun die der Feder mitgeteilte Kraft sei, eine desto kleinere bleibe für die beiden Körper übrig. —

Solange nun A dem B Bewegung mitteile, erleide die Feder eine grössere Ausdehnung, als wenn sie beide sich mit derselben Geschwindigkeit bewegten. Darin stimme also diese Übertragung der Bewegung völlig mit dem Stosse fester Körper überein. Sobald aber die Feder ihre grösste Ausdehnung erfahren habe, trete eine Zusammendrückung derselben ein, indem B eine grössere, A aber eine kleinere Geschwindigkeit erlange, so dass sie zu ihrer natürlichen Länge zurückkehre; ja sie werde sogar noch weiter zusammengepresst, weil nun wiederum B auf A einwirke, was neuerdings einen Teil der Kraft erfordere. Auf diese Art werde nach verschiedenen Über-

tragungen der Bewegung der ursprüngliche Zustand wieder eintreten und die beiden Körper mit der Feder sich in Unendlichkeit fortbewegen.

Riccatus stellt hier einen Vergleich an zwischen den beiden Arten von Übertragung einer Bewegung, den zu verstehen aber Folgendes erkannt werden muss. Wenn die Kugel A die Kugel B nach sich zieht und die Mitteilung der Bewegung auf einem Kahne vor sich geht, der sich mit der Geschwindigkeit V der Kugel A, aber in entgegengesetzter Richtung bewegt, so werden die im Kahne Befindlichen den Eindruck haben, als werde die Bewegung von A verzögert, die von B beschleunigt, bis beide sich mit derselben Geschwindigkeit u bewegen. Die auf dem Ufer Befindlichen werden aber meinen, A sei anfänglich in Ruhe, während ihr von B die Geschwindigkeit $-V$, welche das Schiff besitzt, mitgeteilt werde und zwar solange, bis beide die Geschwindigkeit u haben, so dass also nach mitgeteilter Bewegung $V - u = v$ sein müsse, oder $V = u + v$. Das Verhältnis der Geschwindigkeiten u, v muss irgendwie von dem Verhältnisse der Massen abhängen; aber auch die bei der Dehnung verbrauchte Kraft entspricht einer Relation zwischen den Massen; denn wäre A endlich, B unendlich gross, so wäre die Dehnung sehr klein und im umgekehrten Falle sehr gross; also müsse bei endlichem A und B die dehnende Kraft irgendwie von deren Massen abhängen.

Denkt man sich nun zwei andere Körper $a = A$ und $b = B$, so dass a mit der Geschwindigkeit V auf den ruhenden b stosse, so werden sich beide nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit x bewegen; wenn aber B mit der Geschwindigkeit V auf den ruhenden a stösst, so erhalten beide die gemeinsame Geschwindigkeit y und es lässt sich zeigen, dass $V = x + y$, woraus also folgt, dass $u + v = x + y$, eine Gleichung, welche unrichtig wäre, wenn man mit den Car-

tesianern an einer Erhaltung der Bewegung festhalten wollte. Denn nach dieser Annahme könnte kein Teil der Kraft auf die Ausdehnung der Feder verwendet werden, wodurch $x > u$ und $y > v$, also $x + y > u + v$ würde. Niemand aber werde der Ansicht sein, dass bei der Ausdehnung der Feder eine kleinere Kraft verzehrt werde als beim Stosse; sonst müsste ja die in den Kugeln a, b nach dem Stosse zurückbleibende Kraft kleiner sein als die in A und B nach der Ausdehnung der Feder vorhandene, wodurch $x + y < u + v$ würde. Also muss bei der Dehnung der Feder dieselbe Kraft verzehrt werden wie beim Stosse und die Bewegungsgrösse kann kein Maſs der lebendigen Kraft sein. —

Um nun zu untersuchen, wie gross die zur Dehnung der Feder verwendete Kraft sei und wie man die ursprüngliche Kraft des Körpers A messen müsse, nehme man an, diese letztere sei proportional der Masse und irgend einer Potenz seiner Geschwindigkeit; ebenso sollen sich die nach der Übertragung der Bewegung erlangten Kräfte wie $A^t : B^t$ verhalten. Die lebendige Kraft, die nach der Wirkung in beiden Körpern vorhanden ist, ist nach der obigen Hypothese $(A + B)u^n$; da aber $A^t : B^t = (A + B)u^n : \frac{(A + B)B^t \cdot u^n}{A^t}$, so ist der letzte Quotient der Wert der durch die Dehnung der Feder verbrauchten Kraft. Man erhält also die Gleichung

$$(A + B)u^n + \frac{(A + B)B^t u^n}{A^t} = AV^n \text{ oder}$$

$$u = \frac{A^{\frac{t+1}{n}} \cdot V}{(A + B)^{\frac{1}{n}}(A^t + B^t)^{\frac{1}{n}}}.$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man für die Geschwindigkeit v, welche beide Körper erlangen, wenn B auf A

wirkt $v = \frac{B^{\frac{t+1}{n}} \cdot V}{(A+B)^{\frac{1}{n}} (A^t + B^t)^{\frac{1}{n}}}$. Da aber $V = u + v$,

so ergibt sich $A^{\frac{t+1}{n}} + B^{\frac{t+1}{n}} = (A+B)^{\frac{1}{n}} (A^t + B^t)^{\frac{1}{n}}$.

Nun sind die Werte der Exponenten so zu bestimmen, dass diese Gleichung bei jedem beliebigen Verhältnisse der Massen A, B richtig bleibt, was nur möglich ist für $t = 1$ und $n = 2$. Also ist die ursprüngliche Kraft von A proportional dem Produkte aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit und die Verteilung der Kräfte erfolgt so, dass sich die nach der Übertragung in den Kugeln vorhandene Kraft zu der bei der Dehnung verbrauchten verhält wie A : B — ein Beweis, der in der That grosse Überzeugungskraft besitzt und nichts zu wünschen übrig liesse, wenn nur gezeigt werden könnte, dass sich die Kräfte wie Potenzen mit ganzen Exponenten der Geschwindigkeiten verhalten müssen. Wollte man aber die lebendigen Kräfte der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional setzen, so käme man auf die widersinnige Gleichung $A^{t-1} = - B^{t-1}$. Mag also auch die beim Stosse oder bei der Attraktion verbrauchte Kraft nur klein sein, so lernt man aus ihr doch, dass das alte Mafs der Kräfte der Natur völlig widerspricht. Bei gleichen Massen A und B kommt man noch dazu auf die Gleichung $2 \cdot A^{\frac{t+1}{n}} = 4^{\frac{1}{n}} \cdot A^{\frac{t+1}{n}}$, also $2 = 4^{\frac{1}{n}}$; was nur möglich sein kann für $n = 2$.

Es ergibt sich also in der That, dass jedes andere als das Leibnitzsche Gesetz der Natur widerspricht und der ganze Beweis hiefür beruht nur auf den beiden Voraussetzungen, einmal dass die Theorie der Übertragung einer Bewegung möglich sei und dann dass ein Teil der ursprünglichen Kraft bei der Dehnung der Feder verbraucht werde,

von dem allerdings vorausgesetzt ist, dass er sich zu dem übrigbleibenden verhalte, wie irgend welche Potenzen der Massen, eine Voraussetzung, die jedoch in dieser allgemeinen Form kaum zu viel verlangen dürfte. Alles Übrige ist in streng mathematischer Form abgeleitet und das Resultat stimmt völlig mit Leibnitz überein. Und in der That: der Beweis befriedigt wie wenige von den anderen, welche wir kennen gelernt haben. —

XLIII. Wie sehr übrigens selbst damals noch die Gelehrtenwelt bezüglich des Mafses der Kräfte im Zweifel war, geht aus einer Bemerkung hervor, welche der Professor Samuel König in einer in den Act. erud. 1751 veröffentlichten Abhandlung de universali principio aequilibrii et motus in vi viva reperto etc., in welcher er sagt, er glaube seine Untersuchungen mitteilen zu sollen, weil es ihm gelungen sei, einige Punkte klar zu stellen, deren natürliche Dunkelheit auch jetzt noch, nach so grossen Fortschritten, die Thätigkeit selbst gewandter Geometer behindere.

Alle Anhänger der lebendigen Kräfte hätten freimütig zugestanden, dass dieselben in der Statik im allgemeinen nicht aufrecht zu erhalten seien, dafür aber andere, nämlich die toten Kräfte.

Aber sie hätten dieses Zugeständnis voreilig gemacht unter Misskennung des Rechtes der lebendigen Kräfte für die gesamte Mechanik. Dieses Mafs der toten Kräfte sei aus einer ganz verkehrten Anwendung einer unendlich kleinen Bewegung, die man den Maschinen im Falle des Gleichgewichts in Gedanken beilegte, entstanden. Man könne vielmehr jeden Gleichgewichtszustand nicht bloss fester, sondern auch flüssiger Körper aus der Theorie der lebendigen Kräfte ableiten.

Um dies zu zeigen, wolle er das Problem behandeln, mit Hilfe der lebendigen Kräfte das Verhältnis AC : BC der Arme eines mit den Gewichten A und B belasteten Hebels

zu bestimmen. Man nehme an, der Hebel sei nicht in Ruhe, sondern A falle nach A′ und B steige nach B′; die Gewichte von A und B seien $g \cdot A$ und $g \cdot B$ (wo g die Schwerkraft bezeichnet) $AC = a$ und $BC = b$, $AA' = x$, also $BB' = \frac{bx}{a}$. Dann sei die lebendige Kraft des nunmehr geltenden Systems ACB, da sie gleich sei der lebendigen Kraft, welche durch den Fall des Gewichtes A entstünde, vermindert um die durch den Aufstieg von B entstandene $g \cdot A \cdot x - g \cdot B \cdot \frac{b}{a}$; solle nun dieser Ausdruck 0 werden, so müsse $Aa = Bb$ sein; das sei aber die bekannte Gleichgewichtsbedingung.

Doch mögen in dieser wichtigen Sache noch genauere Untersuchungen angestellt werden, damit bei dieser neuen Art ganz klar werde, durch welchen Beweis aus einer wirklichen Bewegung der Zustand des Gleichgewichts abgeleitet werden könne.

Unter einem Element einer lebendigen Kraft verstehe man das Produkt aus der bewegenden Kraft P in den unendlich kleinen Weg dx, um welchen das Bewegliche dem Centrum der Kräfte näher kommt oder sich von ihm entfernt und zwar im ersteren Falle $+ Pdx$, im letzteren $- Pdx$.

Man brauche also bei der Schätzung lebendiger Kräfte überhaupt nicht auf den Weg Rücksicht zu nehmen, welchen der Körper zurücklege, sondern nur auf die Stösse und auf die Strecken, um welche sich derselbe dem Centrum der Kräfte nähere oder von demselben entferne und auf die Summe aller Elemente der lebendigen Kräfte. Welches auch der Weg eines Körpers sei, er werde immer dieselbe Geschwindigkeit erlangen, wenn er von derselben Entfernung vom Centrum ausgehe und bis zur selben Entfernung gelange. So erlange ein schwerer aus einem Punkte gegen den Horizont fallender Körper immer dieselbe lebendige Kraft, möge

er sich in gerader Linie oder auf einer beliebigen Kurve bewegen.

Der Mangel jeder Bewegung in einem Systeme, das fortwährend von lebendigen Kräften bewegt werde, heisse Gleichgewicht. Daher das Axiom: So oft Kräfte auf ein System so wirken, dass keine lebendige Kraft entstehen kann, ist dieses im Gleichgewichte. Wenn demnach zwei Gewichte A und B an einem Hebel sich umgekehrt verhielten wie ihre Entfernungen vom Hypomochlion, so entstehe Gleichgewicht. (Beweis siehe oben.)

Wenn ein Gewicht M auf einer schiefen Ebene längs dieser ein frei hängendes Gewicht N ziehe, so trete Gleichgewicht ein, falls die beiden Gewichte sich verhielten wie Länge und Höhe der schiefen Ebene; denn gesetzt das System bewege sich und zwar M nach m, N nach n, so sei die erzeugte lebendige Kraft $g \cdot N \cdot Nn - g \cdot M \cdot rm$, wenn rm den Aufstieg von M bezeichne oder $g \cdot N \cdot AC - g \cdot M \cdot BC = 0$.

Auch die Zusammensetzung der Kräfte lasse sich auf ähnliche Weise zeigen. Man lege durch den Scheitel eines beliebigen Winkels A eines Parallelogramms eine Gerade XY und fälle von den anderen Ecken die Normalen BM, CN, DR auf dieselbe, so sei $AN + AM = AR$. Verlängere man noch XY über A hinaus bis G, so dass $AG = AD$, und fälle $GR' \perp XY$, so sei auch $AR' = AN + AM$. Dann könne man aber beweisen, dass wenn drei Kräfte gleich und parallel den Linien AB, AC, AX den Punkt A angreifen, Gleichgewicht eintreten müsse. Denn falls sich A nach a bewege auf XY und man beschreibe mit Ga, CA und BA Kreise, welche GA, Ca und Ba in r, n, m treffen so entstehe die lebendige Kraft $AG \cdot rA - AB \cdot ma - AC \cdot na$

$$= \left(AG \cdot \frac{AR'}{AG} - AB \cdot \frac{AM}{AB} - \frac{AC \cdot MN}{AC}\right) Aa = 0.$$

Auch ein hydrostatisches Prinzip könne man mit Hilfe

dieses Theorems beweisen. Wenn ein System unendlich kleiner Massen M, M′, M″..., welche in beliebigen Entfernungen von einem Centrum O auf einer festen Geraden liegen, durch die Stösse P, P′, P″... gegen dieses Centrum bewegt werde, so sei ein Element der lebendigen Kraft auf der ganzen festen Geraden, während sie in eine beliebige nächstfolgende Lage übergehe, erzeugt durch alle gleichzeitigen Stösse, gleich der lebendigen Kraft, welche successive einem einzigen Massenelemente durch dieselben Stösse mitgeteilt werde, während es die ganze Gerade durchlaufe. Wenn also Oc eine beliebige nicht bestimmte Entfernung bezeichne und der Stoss im Punkte c eine beliebige Funktion x dieser Entfernung sei, ein Element der Masse aber mit dM bezeichnet werde, so werde die auf diese Weise erzeugte lebendige Kraft $dM \int Xdx$ und falls es mehrere Centren gäbe $dM \int Xdx + dM \int Ydy + dM \int Zdz + \ldots$. Sei nun ML ein Cylinder, der durch die Schwere um Mm sinke, so werde, da in diesem Falle die Linie der Annäherung die Höhe des Cylinders sei, ein Element der lebendigen Kraft sich ergeben, wenn man ein Element der Masse mit dieser Höhe multipliziere. Davon lasse sich aber bei der Bestimmung sowohl der Bewegung als des Gleichgewichtes von Flüssigkeiten in kommunizierenden Röhren Gebrauch machen; sei die Höhe in beiden Röhren die gleiche, so trete Gleichgewicht ein; denn falls die eine Oberfläche MN nach mn sinke, müsse die andere ab nach $\alpha\beta$ steigen; dann sei aber die erzeugte lebendige Kraft wegen der Gleichheit der Höhen gleich 0.

Und so könne man zeigen, dass dieser aus der Theorie der lebendigen Kräfte abgeleitete Satz der Statik beim Gleichgewichte eines jeden beliebigen Körpers Geltung habe; denn so oft ein Element der lebendigen Kraft 0 werde, müsse Gleichgewicht eintreten.

Dasselbe lasse sich aber auch an Federn beweisen; hier entspreche nämlich ein Element der lebendigen Kraft dem kleinsten Zuwachse der Spannung und müsse gemessen werden mit dem Produkte aus dem Drucke einer Feder und ihrer Kontraktion.

Aus dem Gesagten gehe aber deutlich hervor, dass jedes Gleichgewicht aus dem Verschwinden der lebendigen Kraft sich ergebe, keineswegs aber aus ihrem Maximum oder Minimum — und darauf bezieht sich der folgende Teil der Arbeit Königs, der aber uns ferner liegend hier übergangen werden möge. Das Hauptverdienst dieses Mannes beruht nach meiner Ansicht darin, dass er die sogenannten toten Kräfte, von denen ja heutzutage kein Mensch mehr spricht, aus der Welt geschafft hat, indem er zeigte, dass sie überflüssig seien.

Nur noch einige Bemerkungen, welche sich auf diesen Punkt beziehen: Alle, welche mit Galilei meinten, man müsse das Gleichgewicht mit dem Produkte der Anfangsgeschwindigkeit in die Masse messen, seien in einem grossen Irrtume gewesen; denn nicht deshalb entstehe Gleichgewicht, weil die Geschwindigkeiten immer im Verhältnisse der Entfernungen der Massen vom Centrum der Bewegung stünden; es stecke eben hinter diesem Mafse ein Paradoxon und deshalb sei er zu der Überzeugung gekommen, dass man die ganze Mechanik aus der Lehre von den lebendigen Kräften ableiten müsse; dieser Weg sei der einfachste und natürlichste, weil er der kürzeste sei. Und man könne gar nicht begreifen, warum selbst die angesehensten Männer zwischen diesen und den sogenannten dynamischen Prinzipien einen Unterschied machten. — Wenn man ihn aber frage, aus welchen Prinzipien er das Theorem der lebendigen Kräfte abgeleitet wissen wolle, so meine er, man müsse es von der Theorie der reinen Kräfte ableiten, welche Leibnitz und Wolff veröffentlicht hätten.

König hat also nicht einen direkten Beweis für das

Maſs der lebendigen Kräfte beigebracht; aber er hat gezeigt, dass man mit Hilfe derselben alle Lehrsätze nicht bloss der Dynamik, sondern auch der Statik beweisen könne und damit ohne Zweifel ihre Existenzberechtigung erwiesen.

XLIV. Im Jahre 1754 erschien jene bereits im Vorworte erwähnte Arbeit des Ingolstädter Docenten J. Ch. Arnold, welche sich ausser auf andere Quellen insbesondere auf die mir nicht zugänglichen dial. delle force vive von Vinc. Riccatus stützt; sie hat den Titel de viribus vivis earumque mensura und besteht aus zwei Teilen, deren erster zum Zwecke der Promotion der Artistenfakultät in Ingolstadt vorgelegt wurde, während der zweite als Habilitationsschrift galt. Wie schon erwähnt, enthält sie eine Geschichte des Streites um das Maſs der Kraft, unterscheidet sich aber aus den oben angegebenen Gründen wesentlich von der vorliegenden Arbeit. Es ist selbstverständlich, dass ich ausser Arnolds eigenen Entwicklungen nur jene historischen Notizen hier wiedergebe, welche sich auf Quellen berufen, von denen ich nicht Einsicht nehmen konnte.

Dass Cartesius selbst mit sich bezüglich des Maſses der Kräfte nicht einig war, dafür bringt Arnold folgende Belege bei:

In seinen princ. phil. P. II. n. 36. p. 53 drücke er die Bewegungsgrösse deutlich durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit aus; aber aus seinen Briefen ergebe sich, dass er seine Ansicht geändert habe. Er habe nämlich in einem Briefe an Mersennus von dem Prinzipe Gebrauch gemacht, dass genau dieselbe Kraft erforderlich sei, einen schweren Körper zu einer gegebenen Höhe zu heben, welche man brauche, einen minder schweren Körper zu einer um so grösseren Höhe zu heben und umgekehrt und auf eine Entgegnung Mersennus', dass dieses Prinzip nicht von Allen anerkannt werde, erwidert, dass die Kraft, welche nötig sei einen Stein zu heben, zwei Dimensionen habe, dagegen die,

welche man zum Stützen eines Punktes brauche, nur eine, dass diese Kräfte sich also verhielten wie Fläche und Linie. Man dürfe die Betrachtung des Raumes mit dem der Zeit oder Geschwindigkeit nicht durcheinandermengen. Als Beispiel habe er den Hebel angeführt und dabei bemerkt, dass es eine Eigenschaft des eintretenden Gleichgewichtes sei, dass wenn das grössere Gewicht am kleineren Arme im stande sei, das kleinere am grösseren zu heben, ersteres einen etwa doppelt so kleinen Raum durchlaufe wie das andere, aber keineswegs mit doppelt so kleiner Geschwindigkeit.

Den Widerspruch dieser Anschauung gegen seine früher ausgesprochene Meinung hätten seine Anhänger damit zu erklären versucht, dass hier nur von gleichzeitigen Bewegungen die Rede sei. Und um das Prinzip von der Erhaltung der Bewegungsgrösse zu retten, dem ganz unzweifelhafte Experimente widersprächen, hätten sie dasselbe getrennt ausgesprochen: entweder bliebe die Summe oder die Differenz der Bewegungsgrösse beim Zusammenstosse konstant, wogegen aber die Leibnitzianer sagten, es sei nicht klar, welche Ursachen, wenn die Kräfte sich zerstörten, um so grössere Wirkungen hervorbrächten, je grösser die Körper seien.

Bemerkenswert ist ferner Arnolds Mitteilung, dass auch Euler der Theorie Leibnitzens nicht besonders günstig gewesen sei, indem er dieselben mindestens als unnötig erklärte. Er meine nämlich, dass die Kraft der Trägheit mit der einer aktiven Kraft, wie Leibnitz sie sich in den Körpern vorstelle, schwer in Übereinstimmung zu bringen sei und dass jene zur Erklärung gewisser Erscheinungen genüge. Der Grund der Bewegungen sei allerdings eine Kraft; aber man solle darunter nichts anderes verstehen, als das, was der Zustand anderer Körper zu ändern vermöge, keineswegs aber dasjenige, in welchem es selbst sei. Die Berechnungen, welche Euler anstelle, stimmten keineswegs immer mit den Resultaten Leibnitzens überein. Später habe er zur Kraft der

Trägheit noch eine andere, welche sich aus der Undurchdringlichkeit zweier oder mehrerer Körper ergebe, hinzugefügt und mit ihrer Hilfe die bereits bekannten Gesetze der Bewegungen abgeleitet. Euler habe auch gemeint, dass die „allbekannten Erscheinungen der Bonner Flaschen“ das Maſs Leibnitzens völlig vernichteten; übrigens scheint sich Euler dabei in einem Irrtume befunden zu haben, wie aus einer Bemerkung Arnolds hervorgeht und auch vergeblich eine richtige Erklärung derselben versucht zu haben.

Erwähnenswert sind ferner die feinen Bemerkungen, welche Arnold bezüglich des Begriffes der lebendigen und toten Kräfte macht, wie er von den verschiedenen Autoren aufgefasst wurde. Er meint, die Ansicht Bernoullis über die Unterscheidung der lebendigen und toten Kräfte sei mit der Idee Leibnitzens nicht völlig übereinstimmend gewesen; er spreche wenigstens von einem Triebe ohne einen wirklichen Stoss, von dem er sagt, dass er wie ein Element zu einem Stosse betrachtet werden könne, aus dessen unendlich oftmaliger Wiederholung endlich ein Stoss erfolgen könne, ohne dass er jedoch eine Erwähnung von der Inkommensurabilität von Trieb und Stoss machte. Diese habe unter anderen s'Gravesande zu zeigen versucht, auch sei sie Cartesius und Mairan bekannt gewesen. In der Arbeit sur les loix de mouvement (pag. 62) habe er unter facultas nicht eine freie Kraft verstanden, sondern etwas, was er zwischen der Fähigkeit zu wirken und dem Wirken selbst verstanden wissen wollte. Etwas anders habe er die lebendige Kraft in der anderen Abhandlung (p. 160) definiert und diese Definition stimme mehr überein mit denen Leibnitzens, Wolffs, Bülffingers und anderer. Eine in gewisser Beziehung andere Definition habe der Italiener Vinc. Riccatus gegeben, ein Anhänger Leibnitzens. Dieser behaupte nämlich, dass Schwere, Elasticität durchaus nicht als genügende Gründe für die Aenderungen des Zustandes der Körper angesehen werden

könnten, da ja der Effekt aufgehoben werde, wenn der hinreichende Grund wegfalle, dagegen aber durchaus keine Aenderung des Zustandes bei Anwendung der Schwere oder Elasticität folge, wenn allenfalls irgend ein Hindernis vorhanden sein sollte. Bei eifrigem Nachdenken müsse man also drei Dinge unterscheiden: Die Kraft z. B. der Elasticität, die Wirkung dieser Kraft und die hiedurch hervorgerufene Zustandänderung. Dies stimme mit der Ansicht der Bernoullianer überein. Die lebendige Kraft sei also schon nicht mehr einfach die Kraft der Trägheit, sondern eine Fähigkeit, durch welche die Kraft der Trägheit eine zusammenhängende, aufeinander folgende Wirkung erzeuge oder vielmehr eine Reaktion, welche der Aktion irgend einer toten Kraft, die den Zustand eines Körpers zu ändern versucht, entspreche, solange bis sie zur Ruhe komme, so dass die in diesem Sinne genommene lebendige Kraft eine durch gewisse Bedingungen modifizierte Kraft der Trägheit sei. —

Bezüglich der lebendigen Kraft beim Zusammenstossen weicher Körper bemerkt Arnold, dass man doch nicht leugnen könne, dass dieselbe in diesem Falle ebenso wie die Bewegungsgrösse nicht derart erhalten bleiben könne, wie in dem Falle, dass kein Zusammendrücken der Teilchen stattfinde. Schon Clarke habe dem Leibnitz in seinem Briefe IV pag. 79 entgegnet, dass zwei weiche Körper, die mit gleicher Kraft gegen einander stossen, alle Bewegung und alle Kraft verlören. Und was einem weichen Körper widerfahre, widerfahre auch in seiner Art einem elastischen, das stehe durch Experimente fest. Daraus könne aber ein bleibender Zweifel gegen die Erhaltung irgendwie gemessener Kräfte erhoben werden. Und das sei dem sehr ähnlich, was Hausen in seiner Abhandlung über die bewegende Kraft entgegnete, dass nämlich bei der Zusammensetzung der Kräfte, welche einen gestreckten Winkel bilden, die entgegengesetzten Teile aufgehoben würden. Leibnitz antwortete dem Clarke damit,

dass, was dem ganzen Körper entgehe, den einzelnen Teilchen, welche beim Zusammenstosse gedrängt würden, zu gute komme; also würden die Kräfte nicht zerstört, sondern über die einzelnen Teilchen ausgestreut. Ich habe diese Stelle namentlich deswegen hier angeführt, um darauf hinzuweisen, wie weit Leibnitz in diesen Dingen gesehen hat. Oder haben nicht gerade die neuesten Lehrsätze der mechanischen Wärmetheorie, haben nicht die in diesem Gebiete angestellten Experimente vollständig die Wahrheit der Leibnitzschen Ideen bewiesen? Mit Recht sagt Arnold ferner, es sei ihm nicht klar genug, dass Bernoulli derartige Körper mit einer Feder vergleiche, die von irgend einer Kraft zusammengedrückt, durch ein Seil gehindert werde, sich auszudehnen; denn die Feder zeige, möge sie auch noch solange zusammengedrückt sein, durch ihre Ausdehnung zur Genüge, dass die Kraft, welche sie hatte, unversehrt sei, während es doch klar sei, dass die Teile weicher Körper nach dem Stosse keine Kraft mehr besässen, — wenigstens keine solche, müssen wir nach der neuen Theorie beifügen, welche sich wieder in Form einer Kraft äusserte. —

Bezeichnend für den Stand der Frage in den Kreisen, welche Arnold zugänglich waren, ist es, dass er, obwohl von der Richtigkeit des Leibnitzschen Mafses überzeugt, trotzdem zugesteht, dass dem Beweise Leibnitzens bisher die Sicherheit fehle. Zu diesem Resultate kommt er an einer Stelle, an welcher er die Frage behandelt, ob die Schwere im Verhältnisse der Zeiten oder vielmehr in dem der Wege bewegt. Dass die Gesetze der beschleunigten Bewegung in beiden Fällen dieselben sein werden, habe Riccatus gezeigt, nur seien sie im ersten Falle einfacher abzuleiten wie im zweiten. Immerhin müsse sich aber ein Unterschied ergeben, wie ja auch Leibnitzens Gesetz, dass die Kraft, welche einen Körper zur vierfachen Höhe hebe, viermal so gross sein müsse, wie die, welche den einfachen zur einfachen Höhe

bringe, nicht mehr statthabe, wenn die Wirkungen der Schwere im Verhältnisse der Zeiten wachsen würden.

Allerdings scheine es nach der allgemein angenommenen Hypothese Newtons billiger zu sein, wenn bei Berechnung der Wirkungen der Schwere auf den Weg und nicht auf die Zeit Rücksicht nehme. Ja wenn man bedenke, dass eine Kraft, die unendlich lange auf einen Körper wirke, gar keine Bewegung hervorbringe, sobald ein Hindernis vorhanden wäre, andrerseits aber überhaupt wirke, sobald sie jenen nur durch einen unendlich kleinen Raum treibe, sei es überhaupt wahrscheinlicher, dass bei Messung bewegender Kräfte der Raum und nicht die Zeit zu Grunde zu legen sei. Damit ist dann wenigstens nach Arnolds Idee ein Wahrscheinlichkeitsbeweis für Leibnitzens Hypothese gefunden.

Mit Mairans Beweisen gegen das Leibnitzsche Maſs kann sich Arnold nicht einverstanden erklären; denn diese Methode involviere einen Widerspruch und zwar einen ganz offenen. Der Körper A, welcher in der ersten Minute mit gleichmässiger Bewegung zur Höhe 4 aufsteigen wolle, in der That aber bei verzögerter Bewegung nur zur Höhe 3 ansteige, verliere einen gewissen Teil seiner Kraft und zwar denjenigen, mit welchem er bei gleichmässiger Bewegung in derselben Zeit noch zur Höhe 1 hätte steigen können. Würde aber der Körper, fragt Arnold, wenn er noch zur Höhe 1 bei gleichmässiger Bewegung anstiege, einen gewissen Teil der Kraft aufwenden? Keineswegs; sonst wäre ja die Bewegung nicht gleichmässig, was gegen die Hypothese; also verliere der Körper durch seinen Aufstieg zur Höhe 3 keinen Teil seiner Kraft. Darauf kämen auch die Zweifel zurück, welche die Marquise von Chastelet erhoben habe.

Bezüglich der Bernoullischen Beweise bemerkt Arnold: Der eine derselben stütze sich bekanntlich auf die Hypothese, dass die Teile AC und BC einer Federreihe AB wie zwei Reihen betrachtet werden können, deshalb, weil der

Punkt C, Schwerpunkt beider Körper, immer fest sei, wie Jedermann zugeben werde. Bernoulli habe aber diese Unbeweglichkeit des Punktes C davon abgeleitet, dass die Drucke, die gegen beide Kugeln ausgeübt werden, gleich seien und deshalb die Anfangs- wie die Endgeschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Massen verhielten. Dass dies aber wahr sei, sei es nun dass die Kräfte der ganzen Reihe gleichmässig auf beide Körper verteilt werden oder sei es, dass die Teile der Reihen, welche auf die Körper respektive wirken, diesen reciprok seien, könne leicht eingesehen werden. Also beweise die Festigkeit des C keines von beiden. Die Sache sei also immerhin zweifelhaft. Auch helfe es nicht viel, die Festigkeit des Punktes C aus der Kontinuität der Reihe AB selbst ableiten zu wollen; denn es sei zweifellos, dass eine einzige Feder, solange sie zusammengepresst gehalten werde, auf beiden Seiten gleichmässig drücke und sich nach dem Drucke gleichmässig ausdehne; also werde auch die ganze Reihe, eben weil sie kontinuierlich sei, beide Kugeln während der ganzen Zeit der Ausdehnung gleichmässig drücken und wenn die Massen der beiden gedrückten Kugeln ungleich seien, die beschriebenen Wege, wenn die Federn in ihre natürliche Lage zurückgekehrt seien, sich umgekehrt verhalten wie die Massen. Es werden sich in Folge dessen auch die beiden Teile in der nämlichen Zeit ausdehnen, weil sich die eine an die andere anschliesse. Jedenfalls stehe also die Hypothese, auf welche sich der eine Beweis Bernoullis stütze, nicht fest.

Auch Riccatus, auf welchen sich Arnold namentlich im zweiten Teile seiner Arbeit mit Vorliebe beruft, habe diesen Satz im 92. Dialoge festzustellen versucht. Man nehme an, es sei in C ein Nagel befestigt und zwar so, dass die Teile AC und BC, deren Längen sich umgekehrt verhalten, wie die Massen, sich fest auf denselben stützen. Dann werden sich die in gleichen Zeiten von beiden Kugeln durchlaufenen

Wege umgekehrt verhalten wie die Längen der Reihen, so dass die einzelnen Federn beider Teile in gleichen Zeiten die nämliche Ausdehnung erleiden. Da also die Elasticität im Verhältnisse der Ausdehnungen abnehme, so folge, dass der Nagel in C immer von zwei gleichen Kräften im entgegengesetzten Sinne angegriffen werde. Es frage sich nun, ob sich jene Kräfte auch dann noch Gleichgewicht halten können, wenn der Nagel entfernt werde. Riccatus gebe dies zu; ob mit Recht oder nicht, sei zweifelhaft; denn nach seiner Lehre drücken gegen den Nagel nur die beiden nächstliegenden Federn und zwar deshalb, weil der Nagel nicht von der Stelle gehe. Wenn man nun an Stelle der Reihe CB eine unendlich lange setze, werde dann der Druck derselbe sein wie früher, werde auch dann noch der Nagel von zwei gleichen entgegengesetzt gerichteten Kräften gedrückt werden? Die Frage lässt Arnold offen; es ist nicht schwer, sie in seinem Sinne zu beantworten.

Das zweite Gesetz Bernoullis widerlegt Arnold nach den Entwicklungen Manfreds und Zanottis, welche wir oben (Seite 209. und 217.) kennen gelernt haben; er meint nur, Manfred habe durch seine Beweisführung dem cartesianischen Maſse nicht mehr genützt oder geschadet als dem Leibnitzens. Es sei übrigens die Behauptung nicht über allen Zweifel erhaben, dass die einzelnen Federn einer beliebigen Reihe CB sich in der gleichen Zeit gerade so ausdehnten, wie wenn sie sich ausserhalb derselben befänden und dass die hier übertragene Bewegung sich gerade so verhielte, wie bei einer Feder, welche man auf ein Schiff gelegt habe. Es gebe Solche, welche genau das Gegenteil annähmen; denn die Punkte einer Reihe von Federn, welche auf ein Schiff gelegt würden, hätten alle die nämliche Geschwindigkeit, wenn sie sich ausdehnten, würden also durch die Elasticität alle auf gleiche Weise beschleunigt anders, als wenn die Federn in derselben Reihe aneinander gebunden wären. Die

Feder HJK z. B. teile bei ihrer Ausdehnung in demselben Augenblicke nicht allen Punkten der Feder KLB dieselbe Geschwindigkeit mit, sondern zuerst nur dem Berührungspunkte K eine kleine Bewegung, dass der Schenkel KL in Folge dessen, dass LB sich schliesst, ein wenig geöffnet werde. Überdies sei aber in den Gesetzen $pdt = dv$ oder $pds = vdv$ die Kraft, welche nie für sich variabel sein kann, als konstant angenommen, während ds und dt variabel seien; daher komme es, dass die Zahl der Drucke, welche von den Reihen AC und BC auf die Kugeln A und B ausgeübt würden, sobald der Druck auf ein Element der Zeit oder des Raumes ausgedehnt werde, bereits in Betracht komme und wenn man np und Np an Stelle von p setze, nicht noch einmal einzuführen sei.

Die Ansichten in diesem Punkte gingen jedenfalls sehr weit auseinander. Von den verschiedenen Beweisen für die eine oder andere Ansicht versucht Arnold nur den Jurins zu widerlegen, den wir Seite 190 kennen gelernt haben, indem er sagt: „Kann man verstehen, dass, wenn eine Feder in beliebiger Zeit mehr ausgedehnt wird als eine andere, die grössere Ausdehnung durch eine kleinere Kraft geleistet wird? Kann man in Übereinstimmung mit der Erfahrung sagen, dass eine Feder bloss durch Druck, auch wenn sie sich nicht öffnet, eine bewegende Kraft erzeugt? Abgesehen davon, dass es nicht klar ist, durch welchen Verbrauch jene zurückbleibende Kraft der einen Feder, welche die kleinere Kugel nicht erhalten konnte, aufgezehrt wird, da ja in der Feder selbst nach der Ausdehnung keine Kraft mehr bleiben kann. Der Vernunft scheint es zu entsprechen, dass die gleiche Kraft beiden Kugeln, der grösseren in längerer, der kleineren in kürzerer Zeit mitgeteilt werde. Jurin scheint auch übersehen zu haben, dass die grössere Kugel die Kraft der einen Feder ebensoviel in ihrer Wirkung behindert, als sie die Zeit ihrer Ausdehnung vergrössert." Auch Riccatus

habe in seinen erwähnten Dialogen Jurins Ideen aufs eifrigste zu widerlegen versucht.

Eine ganze Reihe von Beweisen, welche ich eben mitgeteilt habe, sowohl für als gegen das Leibnitzsche Maſs der Kräfte, verschmäht Arnold mitzuteilen, zum Teile deswegen, weil sie nach seiner Ansicht zu schwierig seien, zum Teile auch deswegen, weil sie ganz deutlich das umgingen, was in Frage stehe. Sie alle litten an dem Übel, dass sie 1) immer nur spezielle Fälle berücksichtigten und deshalb dem Zweifel Platz liessen, ob nämlich, mögen auch gewisse Effekte der Körper im Verhältnisse der Quadrate der Geschwindigkeiten geschätzt werden, daraus ein allgemeines Gesetz formuliert werden könne, 2) weil es meistens zweifelhaft sei, was dann als Effekt genommen werden müsse, dem man die lebendige Kraft proportional setzen müsse, 3) weil die zu vergleichenden Wirkungen in verschiedenen Zeiten stattfinden.

Zu dem Seite 185 erwähnten Beweise V. Riccatus' bemerkt er: Balassus habe demselben bald widersprochen, indem er unter Anderem leugnete, dass Seitenkräfte aus einer Zerlegung der Diagonalkraft entstehen könnten und behauptete, dass wenn von einer Ungleichheit der Seitenkräfte und der Diagonalkraft die Rede sei, nach nichts anderem gefragt werde, als ob der Druck der von den beiden ersteren auf einen Punkt ausgeübt werde, dem der letzteren gleich sei; es brauche also durchaus nicht Wunder zu nehmen, dass das Cartesianische Maſs keine Gleichheit dieser Kräfte zeige, da es ja über jeden Zweifel erhaben sei, dass ein und dieselbe Kraft an ein und demselben Punkte unter verschiedenen Richtungen verschiedene Wirkungen hervorbringe. Und Arnold kann dem Balassus nicht ganz Unrecht geben und meint, es stehe durchaus nicht so fest, dass zwischen Resultante und Komponenten eine Gleichheit bestehen müsse. Ich übergehe die Entscheidung dieser Frage vorläufig; denn wir

werden bald sehen, in welch glänzender Weise Kant sie gelöst hat.

Einen eigenen Abschnitt widmet Arnold den Experimenten, welche zum Zwecke der Lösung der Frage nach dem Maſse der Kräfte angestellt wurden, in welchem er unter anderen erwähnt, dass Riccatus einen hölzernen Keil anwandte, welchen er von Kugeln, die aus den Höhen 8, 32, 72 herabfielen, in ein butterartiges Pulver fallen liess; er bemerkte, dass derselbe bis zu Tiefen, welche sehr nahe bei 1, 3, 6 lagen, getrieben wurde, die also in einem grösseren Verhältnisse standen als die einfachen Geschwindigkeiten, aber durchaus nicht in dem ihrer Quadrate. Ein andermal liess er hölzerne Kugeln in ein mit Wasser gefülltes Gefäss aus verschiedenen Höhen fallen und fand, dass die Tiefen, bis zu welchen sie einsanken, im Verhältnisse der einfachen Geschwindigkeiten zu stehen schienen. Da aber beim ersten Experimente die Butter, je tiefer der Keil eindrang, desto mehr kondensiert wurde und in Folge dessen mehr Widerstand leistete und überdies nicht die ganze Kraft der Kugel zur Herstellung einer Grube verwendet wurde, weil sie etwas zurücksprang und da endlich der Widerstand der Luft und die Reibung in der Butter nicht zu vernachlässigen waren, beim anderen Experimente aber, wie Riccatus selbst angibt, in dem von der Kugel einmal zerteilten Wasser sogleich Wirbel entstanden, welche die Kugel von der senkrechten Falllinie ablenkten, und eine Art Spirale beschreiben liessen und zudem die Tiefen, zu welchen die Kugeln einsanken, sich nicht genau beobachten liessen, so ist es durchaus nicht wunderbar, wenn jene Grübchen und diese Tiefen mit keinem bis dahin bekannten Maſse übereinstimmten.

Auch von den übrigen zum Zwecke der Feststellung des Maſses der Kraft gemachten Experimenten erwartet sich Arnold keine Lösung der Frage; er meint, sie seien zu wenig

exakt, um wahre Aufklärung geben zu können und es lasse sich deshalb aus ihnen ebensowenig ein Beweis für als gegen das Mafs Leibnitzens gewinnen.

Aus dem Mitgeteilten ergibt sich, dass Arnold zu keiner überzeugenden Entscheidung in der Sache kam, wenn sich auch aus seinen Bemerkungen ohne Zweifel ergibt, dass er dem neuen Mafse geneigter war als dem alten. Aber ein grosses Verdienst hat er sich dadurch erworben, dass er als der erste und noch mitten im Kampfe stehend den Versuch machte, eine geschichtliche Darstellung des Streites um das Kräftemafs zu geben.

## Siebenter Abschnitt.

XLV. Unter all den bisher erwähnten Abhandlungen ist nicht eine, welche einen zwingenden Beweis für das eine oder andere Mafs geliefert hätte, nicht eine, welche nicht widerlegt oder mindestens bezweifelt worden wäre. Die definitive Lösung der Frage war zwei bedeutenden Männern vorbehalten: d'Alembert und Kant, deren Arbeiten wir, eben weil sie den Schlussstein des ganzen Gebäudes bilden, an die letzte Stelle setzen, wiewohl die eine bereits 1743 erschien, die andere 1747. d'Alemberts Lösung ist kurz, nur in Strichen gezeichnet, hat aber durch ihre rasche Verbreitung in der ganzen Welt vielleicht mehr zur Beendigung des Streites beigetragen als die Kants, welche gründlich, eingehend, aber durch ihr spätes Bekanntwerden weniger wirksam war als jene. Kant hat aber nicht bloss eine Lösung des Problems gegeben, sondern auch gezeigt, worin die bisher gegebenen Lösungen fehlerhaft waren. Seine Arbeit ist deshalb für die Geschichte dieses Streites von weit höherem Werte als jene d'Alemberts.

Immerhin ist es aber bewundernswert, mit welcher Schärfe dieser letztere Gelehrte Begriffe zu unterscheiden

weiss, mit welch überzeugender Kraft er Definitionen festzustellen vermag, die bis dahin selbst grossen Geistern unklar und schwankend gewesen waren. Es ist dies so recht aus den Bemerkungen zu erkennen, welche er in dem discours préliminaire zu seinem Traité de dynamique macht. d'Alembert sagt dort: Alles, was wir bei der Bewegung eines Körpers deutlich sehen, sei, dass er einen bestimmten Weg durchläuft und dass er dazu eine bestimmte Zeit braucht; also solle man doch von dieser Idee allein alle Prinzipien der Mechanik ableiten, wenn man sie auf erschöpfende deutliche Art beweisen wolle. Aus diesem Grunde habe er auch die bewegenden Ursachen ausser Acht gelassen und an deren Stelle bloss die Bewegungen betrachtet, welche sie erzeugen; deshalb habe er auch die Kräfte, welche den bewegten Körpern anhaften, auf die Seite gesetzt, weil sie dunkel und metaphysisch seien und dazu angethan, eine an sich klare Wissenschaft zu verdunkeln.

Darin sei nun auch der Grund zu suchen, warum er sich nicht weiter in die Untersuchung der berühmten Frage um die lebendigen Kräfte einlassen zu müssen glaube. Ungeachtet der Auseinandersetzungen, welche diese Frage veranlasst haben, habe ihn doch ihr völlige Unfruchtbarkeit für die Mechanik veranlasst, derselben in seinem Traité nicht Erwähnung zu thun. d'Alembert scheint mir aber hier doch etwas zu scharf zu urteilen; denn abgesehen davon, dass Leibnitz, Bernoulli und andere mit Hilfe der neuen Theorie eine Reihe von einzelnen Problemen lösten, welche den Gegnern unlösbar blieben, war ohne Zweifel dieser Streit für die Entwicklung der Mechanik sehr fruchtbar und es ist zweifelhaft, ob ohne denselben selbst ein d'Alembert sie zu jener Reife gebracht hätte, welche sie durch ihn in der That erlangte. Er scheint auch doch gefühlt zu haben, dass diese Idee „von der Leibnitz glaubte, sich die Ehre einer Entdeckung zuschreiben zu dürfen“, nicht so ganz wertlos

sei; dann fügt er bei, er wolle zwar den Leser nicht mit den Einzelnheiten dieser Frage langweilen, aber es werde auch nicht unpassend sein, die Prinzipien schrittweise zu entwickeln, welche zu ihrer Lösung führen. Die Stelle, wie sie geschrieben ist, macht uns einen des grossen Mannes nicht würdigen Eindruck; es kommt uns vor, als sollten Leibnitzens Verdienste herabgewürdigt werden. Konnte d'Alembert keinen anderen grossen Geist neben sich ertragen oder waren Leibnitzens Gedanken deswegen des Preises nicht würdig, weil sie nicht dem Haupte eines Franzosen entstammten?

Doch zur Sache! „Wenn man von der Kraft bewegter Körper spricht," sagt d'Alembert, „so verbindet man entweder mit dem Worte, welches man spricht, nicht die gehörige Vorstellung oder man meint damit im allgemeinen nur die Eigenschaft bewegter Körper, Hindernisse zu überwinden oder ihnen Widerstand zu leisten. Das heisst doch man kann weder mit dem Wege, den ein Körper gleichmässig durchläuft, noch mit der Zeit, welche er dazu braucht, noch endlich mit einer einfachen Betrachtung einzig und allein seiner Masse und seiner Geschwindigkeit die Kraft unmittelbar messen, sondern einzig durch die Hindernisse, denen ein Körper begegnet und durch den Widerstand, welchen ihm diese leisten. Je bedeutender das Hindernis ist, welches ein Körper überwinden oder dem er widerstehen kann, desto grösser kann man sagen sei seine Kraft, wenn man dieses Wort, ohne damit ein vermeintliches Wesen, das in dem Körper zurückbleibt, bezeichnen zu wollen, nur in dem Sinne gebraucht, um damit auf kurze Art eine Thatsache auszudrücken, ungefähr wie man sagt, ein Körper habe zweimal so viel Geschwindigkeit wie ein anderer, statt zu sagen, er durchlaufe in derselben Zeit den doppelten Weg, ohne damit zu behaupten, dass das Wort Geschwindigkeit ein dem Körper innewohnendes Ding bezeichne.

Dies wohl verstanden ist es klar, dass man der Bewegung eines Körpers drei Arten von Hindernissen entgegenstellen kann; unüberwindliche Hindernisse, welche die Bewegung des Körpers vollständig vernichten, wie sie auch sein mag; oder solche, welche nur so viel Widerstand besitzen, um seine Bewegung aufzuheben und welche diese in einem Augenblicke zerstören; das ist beim Gleichgewichte der Fall; endlich Hindernisse, welche allmählich die Bewegung aufheben; und das ist der Fall bei der verzögerten Bewegung. Da die ersteren alle Arten von Bewegungen vernichten, so können sie nicht dazu dienen, die Kraft kenntlich zu machen; man kann also nur beim Gleichgewichte oder bei der verzögerten Bewegung ihr Maſs suchen. Nun ist die ganze Welt der Ansicht, dass nur dann Gleichgewicht zwischen zwei Körpern vorhanden ist, wenn die Produkte aus den Massen und den virtuellen Geschwindigkeiten gleich sind. Also kann beim Gleichgewichte die Bewegungsgrösse die Kraft darstellen. Die ganze Welt stimmt auch darin überein, dass bei der verzögerten Bewegung die Zahl der überwundenen Hindernisse sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält. Daher schliessen die Anhänger der lebendigen Kräfte, dass die Kraft sich wirklich bewegender Körper im allgemeinen dem Produkte aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit gleich sei. Und im Grunde genommen, welche Schwierigkeit sollte daraus entstehen, wenn das Maſs der Kraft beim Gleichgewichte ein anderes ist als bei der verzögerten Bewegung, da man ja, falls man nur nach bestimmten Begriffen urteilt, mit dem Worte Kraft nur den Effekt bezeichnet, welcher bei der Überwindung eines Hindernisses erzeugt wird? Man muss indes gestehen, dass die Ansicht derjenigen, welche die Kraft als das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit auffassen, nicht bloss beim Gleichgewichte, sondern auch bei der verzögerten Bewegung statt haben kann, sobald man die Kraft im letzteren Falle nicht

mit der absoluten Grösse der Hindernisse misst, sondern mit der Summe ihrer Widerstände. Man könnte also nur bezweifeln, dass diese Summe von Widerständen der Bewegungsgrösse proportional sei, weil nach allgemeiner Annahme die Bewegungsgrösse, welche der Körper in jedem Augenblicke verliert, dem Produkte des Widerstandes und der unendlich kleinen Zeitdauer proportional ist, und weil die Summe dieser Produkte offenbar der Gesamtwiderstand ist. Die ganze Schwierigkeit kommt also darauf zurück, zu untersuchen, ob man die Kraft mit der absoluten Grösse der Hindernisse messen muss oder mit der Summe ihrer Widerstände. Es scheint natürlicher, die Kraft in dieser letzteren Art zu messen; denn ein Hindernis ist nur insoferne ein solches, als es Widerstand leistet, das heisst die Summe der Widerstände ist das überwundene Hindernis; überdies hat man, wenn man die Kraft so misst, für Gleichgewicht und verzögerte Bewegung ein gemeinsames Mafs. Nichtsdestoweniger kann man, da wir ja eine bestimmte und klare Anschauung des Wortes Kraft haben, Jedem die Entscheidung hierüber überlassen und die ganze Frage besteht dann nur in einer sehr unnützen metaphysischen Diskussion, oder in einem Wortgefechte, ganz unwürdig, die Philosophen noch länger zu beschäftigen.

Eine ganz natürliche Betrachtung soll dies schliesslich beweisen. Sei es, dass ein Körper die einfache Tendenz hat, sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit zu bewegen und dass dieses Bestreben durch irgend ein Hindernis aufgehalten wird, sei es, dass er sich wirklich und gleichförmig mit dieser Geschwindigkeit bewegt, oder sei es endlich, dass er sich mit dieser Geschwindigkeit zu bewegen anfängt und dass diese sich verzehrt und allmälich verschwindet durch eine beliebige Ursache, so ist der Effekt dieses Körpers in jedem Falle ein anderer; aber der Körper an sich betrachtet hat in dem einen Falle nicht mehr Kraft wie im anderen; nur

die Wirkung der Ursache, welche den Effekt erzeugt, ist verschieden angewendet. Im ersten Falle reduziert sich der Effekt auf eine blosse Tendenz, welche eigentlich überhaupt kein genaues Maſs zulässt, weil dabei keine Bewegung entsteht; im zweiten Falle ist der Effekt der in einer gegebenen Zeit gleichmässig durchlaufene Weg und dieser Effekt ist der Geschwindigkeit proportional; im dritten Falle besteht der Effekt in dem Wege, der bis zur völligen Vernichtung der Bewegung durchmessen wird und dieser Effekt ist wie das Quadrat der Geschwindigkeit. Aber diese verschiedenen Effekte sind offenbar Erzeugnisse der nämlichen Ursache; also haben diejenigen, welche sagten, die Kraft sei bald wie die Geschwindigkeit und bald wie deren Quadrat, nur vom Effekte zu sprechen meinen können, wenn sie so sprachen. Diese Verschiedenheit der Effekte, fügt d'Alembert bei, die doch von derselben Ursache kommen, kann zeigen, wie wenig richtig und genau das oft gebrauchte Axiom von der Proportionalität der Ursache und der Wirkung sei.

Schliesslich werden selbst diejenigen, welche nicht im stande sind, sich bis zu den metaphysischen Prinzipien der Frage der lebendigen Kräfte zu erheben, deutlich sehen, dass dies nur ein Wortstreit sein kann, wenn sie beachten, dass beide Parteien vollständig übereinstimmen in den Fundamentalsätzen des Gleichgewichts und der Bewegung. Wenn man das nämliche mechanische Problem zwei Geometern vorlegt, von denen der eine ein Gegner, der andere ein Anhänger der lebendigen Kräfte sei, so werden ihre Lösungen, wenn sie richtig sind, immer vollständig übereinstimmen. Die Frage nach dem Maſse der Kräfte ist also für die Mechanik ganz unnütz und sogar ohne irgend einen reellen Hintergrund.“ d'Alembert meint, es wäre auch über diese Frage nicht soviel geschrieben worden, wenn man sich mehr Mühe gegeben hätte Klares und Unklares auseinanderzuhalten — eine Bemerkung, der wir doch nicht so ganz beipflichten

können; denn erst die grosse Zahl tüchtiger Arbeiten war im stande, zu zeigen, was eben an der Frage klar und was unklar war.

Die Bemerkungen d'Alemberts unterscheiden sich überhaupt nach meiner Ansicht von Kants gründlichen Auseinandersetzungen wesentlich dadurch, dass jener die Frage nach dem Mafse der Kraft völlig aus der Welt schafft, während dieser gerade das Wesen derselben darzulegen sucht. Mag auch d'Alemberts Lösung dem Mathematiker und Physiker genügen, den Philosophen wird sie nicht befriedigen; Kants Lösung aber wird in der Geschichte des Denkens eine unvergessliche Stellung einnehmen. Aber das eine haben beide Lösungen gemeinsam — und darin beanspruchen sie den gleichen Wert, — dass sie zeigen, dass die ganze Verwirrung, welche dieser Streit in die Mechanik brachte, nur auf ungenaue Begriffsbestimmungen zurückzuführen ist, dass also der Streit geschlichtet ist, sobald man sich über die Ideen ins Klare kommt, welche dabei festzuhalten sind.

XLVI. Die schon vielfach erwähnte, auf unser Thema sich beziehende Abhandlung, war die Erstlingsarbeit Kants, welcher wie kein anderer mit schonungsloser Gründlichkeit die Schwächen fast aller bis dahin gelieferten Beweise sowohl für als gegen das neue Mafs aufdeckt und an deren Stelle einen unumstösslich richtigen Beweis setzt. Rosenkranz, der Herausgeber der Kant'schen Schriften, schreibt in der Vorrede hiezu über diese Abhandlung: „Seine erste Schrift, deren Widmung er an seinem Geburtstage, den 22. April 1747 schrieb — sie ist dem Königsberger Professor der Medizin Joh. Chr. Bohlius gewidmet — lässt uns seine grossartige Belesenheit in der Literatur des Gegenstandes, um den es sich handelt, billig bewundern, wenn wir bedenken, dass er selbst erst zweiundzwanzig Jahre alt war.... Man sieht, dass Kant in Betreff der Schätzung der sogenannten lebendigen Kraft mehr den Ansichten der Cartesianer,

in Bestimmung des Begriffs selbst mehr den Leibnitzianern zuneigte; man freut sich, dass er die Endlichkeit der toten und die Unendlichkeit der lebendigen Kraft, den Unterschied der möglichen und wirklichen Bewegung mit grosser Schärfe bestimmt; man entdeckt zuletzt, wie ihn der Übergang der Kraft aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung, die Lebendigmachung, die Vivifikation besonders beschäftigt“....

In dem Verzeichnisse seiner Schriften, welches ihm Borowski 1792 bei Gelegenheit seines ersten biographischen Abrisses von Kants Leben zur Vervollständigung vorlegte, schrieb Kant eigenhändig zu dem Titel dieser Schrift: „Was dieses Werk im Auslande und bei den damals zum Teil noch lebenden Männern, denen Kant sich entgegenstellte, bewirkt hat, ist nie recht bekannt geworden. Ich vermute, es ist zu wenig im Auslande verbreitet gewesen. Es ward zum Teil auf eigene, zum Teil auf eines nahen Verwandten Kosten abgedruckt, kam gar nicht in den Buchhandel und ward einer an sich reifen Frucht, die man aber nicht abpflückte und bewachte, ähnlich.“ Schon 1792 gehörte ein Exemplar dieses Werkes zu den Seltenheiten. Später wurde es in verschiedenen Sammlungen abgedruckt.

Der volle Titel desselben ist: „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurteilung der Beweise, deren sich Herr von Leibnitz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedient haben, nebst einigen vorhergehenden Betrachtungen, welche die Kraft der Körper überhaupt betreffen.“

Ich will nun versuchen in möglichster Kürze das Wesentlichste aus demselben mitzuteilen und hebe zunächst aus dem Vorworte folgende wissenswerten Bemerkungen heraus. Kant meint: „Der Herr von Leibnitz hat allem Ansehen nach die lebendigen Kräfte in den Fällen nicht zuerst erblickt, darin er sie zuerst der Welt darstellte. Der Anfang einer Meinung ist gemeiniglich viel einfacher, besonders einer Meinung, die

etwas so Kühnes und Wunderbares mit sich führt als die von der Schätzung nach dem Quadrat. Man hat gewisse Erfahrungen, die sehr gemein sind und dadurch wir wahrnehmen, dass eine wirkliche Bewegung immer mehr Gewalt mit sich führe als ein toter Druck, wenngleich er noch so stark ist. Diese Beobachtung war vielleicht der Same eines Gedankens, der unter den Händen des Herrn von Leibnitz nicht unfruchtbar bleiben konnte.“

Er ist ferner der Ansicht, dass die Sache der lebendigen Kräfte einmal hätte dem menschlichen Verstande auffallen müssen; denn „die überwältigten Hindernisse der Schwere, die verrückten Materien etc., Alles stimmt auf eine wunderbare Art zusammen, den Schein der Schätzung nach dem Quadrate der Geschwindigkeit zu stande zu bringen.“ „Sowohl die Partei des Cartesius als die des Herrn von Leibnitz haben für ihre Meinung alle die Überzeugung empfunden, der man in der menschlichen Erkenntnis gemeiniglich nur fähig ist. Man hat von beiden Teilen über nichts, als das Vorurteil der Gegner geseufzt ... Indessen zeigt sich doch ein gewisser merkwürdiger Unterschied unter der Art, womit sich die Partei der lebendigen Kräfte zu erhalten sucht und unter derjenigen, womit die Schätzung des Cartesius sich verteidigt. Dieser beruft sich nur auf einfache Fälle, in denen die Entscheidung der Wahrheit und des Irrtums leicht und gewiss ist, jene im Gegenteile macht ihre Beweise so verwickelt und dunkel als möglich und rettet sich so zu sagen durch Hilfe der Nacht aus einem Gefechte, darin sie vielleicht bei einem rechten Lichte der Deutlichkeit allemal den kürzeren ziehen würde. Die Leibnitzianer haben auch noch fast alle Erfahrungen auf ihrer Seite; dies ist vielleicht das einzige, was sie vor den Cartesianern voraus haben.“ Diese Worte Kants glaubte ich wörtlich anführen zu müssen, einmal weil sie seine Stellung zu der Frage so recht zu erkennen geben, dann aber auch weil sie ohne Zweifel die

wahre Lage der Sache kennzeichnen: ein überzeugender Beweis war bis dahin weder für die eine noch für die andere Anschauung gegeben worden.

Merkwürdig sind auch Kants Schlussworte seiner Vorrede; wir können heute das Eintreffen seiner Prophezeihung konstatieren, die dahin lautete, dass dieser Streit entweder in kurzem abgethan oder niemals aufhören werde; ich glaube, es gibt keinen Gelehrten mehr, welcher zweifelte, welche Anschauung die richtige sei.

Aus dem ersten Hauptstücke, welches von den Kräften der Körper überhaupt handelt und sich in zumeist metaphysischen Betrachtungen derselben ergeht, welche uns hier ferne liegen, will ich nur eine Bemerkung hervorheben, welche für das Verständnis des Folgenden unentbehrlich ist. Kant teilt alle Bewegungen in zwei Hauptarten ein: die eine hat die Eigenschaft, dass sie sich in dem Körper, welchem sie mitgeteilt worden ist, selber erhält und ins Unendliche fortdauert, wenn kein Hindernis sich entgegensetzt. Die andere ist eine immerwährende Wirkung einer stets antreibenden Kraft, bei der nicht einmal ein Widerstand nötig ist, sie zu vernichten, sondern die nur auf der äusserlichen Kraft beruht und eben so bald verschwindet, als diese aufhört, sie zu erhalten. Als Beispiel der ersten Art nennt er alle geworfenen, als solches der zweiten Art alle geschobenen oder gezogenen Körper. Die Bewegung erster Art sei vom toten Druck nicht verschieden; sie habe im Vergleiche zu der zweiten Art etwas Unendliches; denn letztere könne in jedem Augenblicke verschwinden, erstere aber sei eine innerliche Quelle einer an sich unvergänglichen Kraft. — Die Bewegung zweiter Art setze eine Kraft voraus, die sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte. Wenn ein Körper in freier Bewegung in einem unendlich subtilen Raume laufe, so könne seine Kraft nach der Summe aller Wirkungen, welche er in Ewigkeit thue, abgemessen werden. Man ver-

gleiche nur zwei Körper A und B, von denen A die Geschwindigkeit 2, B aber 1 habe, so drücke A in Ewigkeit die unendlich kleinen Massen des Raumes, welchen er durchlaufe, mit doppelt mehr Geschwindigkeit als B; allein er lege auch in dieser unendlichen Zeit doppelt mehr Raum zurück als B; also sei die ganze Grösse der Wirkung des A dem Produkte aus der Kraft, womit er den kleinen Teilen des Raumes begegne, in die Menge derselben proportioniert und ebenso sei es mit der Kraft des B. Aber die Wirkungen beider in die Molekule ihres Raumes seien ihren Geschwindigkeiten proportioniert und die Mengen der Teilchen ebenfalls, woraus sich ergebe, dass sich ihre Wirkungen und demnach ihre Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten.

Die toten Drucke könnten nicht mehr als die einfache Geschwindigkeit zum Maſse haben; denn der Widerstand, welcher sie überwältige, habe nur die einzige Geschwindigkeit zu vernichten nötig, welche der Körper brauche, seinen Ort zu ändern, weil ihre Kraft nicht auf den Körpern selber beruhe, sondern nur durch äussere Gewalt vernichtet werde. Mit den lebendigen Kräften sei es aber ganz anders. Die Substanz sei bemüht ihren Zustand aufrecht zu erhalten; der äusserliche Widerstand müsse also neben der Kraft, welche er brauche, der Geschwindigkeit des Körpers die Wage zu halten, noch eine besondere Gewalt haben, dieses Bestreben der Zustandserhaltung zu brechen und der ganze Widerstand müsse demnach im zusammengesetzten Verhältnisse aus der Proportion der Geschwindigkeit und der Kraft der Zustandserhaltung sein, also bei der Gleichheit dieser Verhältnisse im Verhältnisse der Quadrate der Geschwindigkeiten.

Man wird zugeben müssen, dass diese beiden Erklärungen etwas weit Überzeugenderes haben, als alle früheren; sie zeichnen sich ohne Zweifel durch grosse Klarheit und

Verständlichkeit aus wie alle folgenden, in welche wir nun in möglichster Kürze einzudringen suchen, wenn es freilich kein Leichtes ist, Worte eines Mannes, welche auf der Wagschale ausgemessen sind, im Auszuge wiederzugeben.

Im zweiten Hauptstücke handelt Kant nämlich von der Untersuchung der Lehrsätze der Leibnitzschen Partei, mit der Bemerkung, dass er sich zur Regel genommen habe, bei ganz widersprechenden Meinungen seine Aufmerksamkeit auf einen gewissen Mittelsatz zu richten.

Zwei Fehler finde er in dem Satze Leibnitzens; derselbe werde immer in der Formel vorgetragen: „Wenn ein Körper in wirklicher Bewegung begriffen ist, so ist seine Kraft wie das Quadrat seiner Geschwindigkeit". Nach diesem Satze sei also das Kennzeichen dieses Mafses der Kraft nichts als die wirkliche Bewegung. Es könne sich aber ein Körper wirklich bewegen, ohne dass seine Kraft grösser wäre als die, welche er etwa durch blossen Druck ausüben würde. Eine Kugel, welche man auf einer glatten Fläche fortschiebe, höre sofort auf, sich weiter zu bewegen, wenn man die Hand abziehe; man könne sie also ansehen als wenn sie sich gar nicht bewegt hätte und sie sei demnach gar nicht von einer solchen verschieden, welche einen toten Druck ausübe. — Leibnitz hätte also nicht eine „wirkliche" Bewegung allein als Kennzeichen der lebendigen Kraft angeben sollen; es wäre auch nötig gewesen, eine „freie" Bewegung hinzuzusetzen; denn wenn die Bewegung nicht frei sei, so habe der Körper niemals eine lebendige Kraft. Man müsse also das Leibnitzsche Gesetz, wo es sonst nur richtig sei, so aussprechen: „Ein Körper, der in wirklicher und freier Bewegung ist, hat eine Kraft, die" etc.

Was nun den zweiten Einwurf betrifft, so sagt Kant, die Anhänger Leibnitzens seien darin mit den Cartesianern noch einig, dass die Körper, wenn ihre Bewegung noch im Anfange sei, eine Kraft besässen, welche sich wie ihre blosse

Geschwindigkeit verhalte; sobald man aber die Bewegung wirklich nennen könne, habe der Körper das Quadrat der Geschwindigkeit zum Maſse.

Eine Bewegung nenne man nur dann wirklich, wenn, indem sie währe, eine Zeit verflossen sei; diese Zeit mache es, dass man die Bewegung wirklich nennen könne; sie sei aber ganz undeterminiert und könne nach Belieben bestimmt werden; man könne sie also annehmen so klein man wolle, um eine wirkliche Bewegung anzuzeigen. Demnach sei die in der Bewegung aufgewandte Zeit der wahre und einzige Charakter der lebendigen Kraft; sie allein sei es, wodurch diese ein anderes Maſs als die tote Kraft erhalte. Nun schliesst Kant folgendermassen: „Die Zeit, die sich zwischen dem Anfange der Bewegung und dem Augenblicke des Anstosses des Körpers befindet, kann beliebig kürzer gedacht werden, ohne dass die Bedingung der lebendigen Kraft sich verlieren würde; wenn man nun diese Abkürzung fortsetzt, so wird der Körper endlich im Anfangspunkte sein, wo nicht mehr lebendige, sondern tote Kraft eintritt; die Verkleinerung der Zeit ist also kein Grund, welcher der Bedingung der lebendigen Kraft widerspricht und doch zugleich ein Grund hiezu, was sich widerspricht. Also kann Leibnitzens Gesetz von der Schätzung der Kräfte nicht stattfinden; denn es legt den Körpern, welche sich überhaupt eine Zeit lang bewegt haben, lebendige Kraft bei, die Zeit mag so kurz oder so lang sein, als sie wolle.“

Dasselbe lasse sich auch aus dem Gesetze der Kontinuität erweisen. Was überhaupt gelte, wenn ein Körper sich eine Zeit lang bewegt habe, müsse auch im Anfange der Bewegung gelten; denn eine sehr kleine Dauer der Bewegung sei vom Anfange nicht verschieden. Wenn also ein Körper, mag er sich auch noch so kurz bewegt haben, lebendige Kraft besitzt, so muss er sie auch im Anfange der Bewegung haben: Weil also aus dem Leibnitzschen Ge-

setze diese Ungereimtheit folge, dass selbst im Anfangspunkte die Kraft lebendig sein würde, könne man ihm nicht beipflichten. Man könne nicht begreifen, wie ein Körper der im Anfangspunkte tote Kraft habe, in unendlich kleiner Entfernung eine unendlich mal grössere lebendige Kraft haben sollte.

Eine undeterminierte Zeit könne also keine Bedingung zur lebendigen Kraft sein; aber auch eine determinierte Zeit könne nicht die eigentliche Bedingung derselben abgeben. Denn gesetzt man könnte erweisen, dass ein Körper, der eine Geschwindigkeit hat, nach einer Minute eine lebendige Kraft haben werde, und dass diese Minute diejenige Bedingung sei, unter der ihm diese Kraft zukommt, so würde in der doppelten Zeit alles doppelt sein, was vorher einzeln genommen eine lebendige Kraft in ihn setzte. Die Grösse der ersten Minute setzte aber der Kraft eine neue Dimension hinzu; also werde die Grösse von zwei Minuten eine Dimension mehr hinzusetzen. Das heisse: eine Kraft werde bei einförmiger Bewegung bald die Geschwindigkeit schlechthin, bald ihr Quadrat, bald den Würfel u. s. w. zum Mafse haben, was Niemand verteidigen werde.

Daraus ergibt sich die wichtige Folge, dass die Mathematik niemals Beweise zum Vorteil der lebendigen Kräfte darbieten könne; denn in dieser Wissenschaft ist man bei Schätzung der Kräfte an keinen bestimmten Augenblick gebunden. Und da die lebendigen Kräfte mit den toten nicht nach gleichem Mafse gemessen werden können, so sind erstere von einer mathematischen Betrachtung gänzlich ausgeschlossen. Überdies betrachtet diese nichts als Geschwindigkeit, Masse und Zeit, von welchen keines ein Grund lebendiger Kraft sein kann.

Die Gründe der Mathematik werden übrigens immer Cartesius' Gesetze bestätigen; denn mathematische Grössen haben dieselben Eigenschaften, mögen sie so klein oder so

gross als möglich sein. Die Kraft, welche man in einer mathematischen Betrachtung der Bewegung herausbringt, wird also niemals andere Eigenschaften haben als diejenige, welche in einer unendlich kleinen Zeit von dem Anfangsaugenblicke in dem Körper vorhanden ist. Da dies aber eine tote Kraft ist, so werden alle mathematischen Bewegungen als Mafs nur die einfache Geschwindigkeit darlegen. — Nun werden die Beweise der Leibnitzschen Partei insbesonders untersucht.

Leibnitzens Satz, es sei einerlei Kraft nötig, einen 4 Pfd. schweren Körper auf einen Schuh und einen 1 Pfd. schweren auf vier Schuhe zu heben, wird als ein unrecht angewandter Grundsatz des Cartesius erklärt und auch hier jener Einwurf erhoben, welcher gegen Leibnitzens Mafs gleich anfangs geltend gemacht worden war, dass nämlich Leibnitz die Bedingung der Gleichheit der Zeit ausser Acht gelassen habe. Doch macht es mir den Eindruck, als ob Kant Leibnitzens eigene Entgegnungen auf diesen Vorhalt (siehe Seite 6) nicht gekannt hätte.

Auch der Seite 90 mitgeteilte Beweis Hermanns wird und zwar folgenderweise widerlegt: Die unendliche Feder AB stelle die Schwere vor; nun ist gleichviel Kraft nötig, eine einzige von beliebig vielen, gleich gespannten Federn eine Sekunde lang zuzudrücken, als sie alle nach einander binnen eben dieser Zeit zu schliessen. Also ist nicht die Menge der zusammengedrückten Federn sondern die Zeit des Druckes, d. h. also nicht der in Folge der Schwere zurückgelegte Raum, sondern die Zeit wie lange die Kraft des Körpers der Schwere widerstehen kann, ein Mafs für die Wirkung derselben.

Kant meint hiebei, dass auch Mairan der wahre Vorteil entgangen sei, den er aus dem Unterschiede der Zeit hätte ziehen können; dadurch seien die Cartesianer in die Lage gekommen, den Leibnitzianern zuzugeben, ein Körper könne

mit doppelter Geschwindigkeit vierfache Wirkung erzeugen, wenn sie sich auch durch die ziemlich schlechte Ausflucht retten, dass dies nur in vierfacher Zeit geschehen könne.

Kant lässt, um zu zeigen, dass zur Schätzung der Kraft, welche die Schwere erzeugt, die Zeit mit in Erwägung gezogen werden müsse, einen Körper über eine schiefe Ebene herabfallen und gleichzeitig einen gleich grossen Körper über die Höhe derselben frei hinabgleiten. Dann müsse sich nach Hermanns Theorie die Kraft des Körpers am Ende der schiefen Ebene zu der am Fusspunkte ihrer Höhe verhalten wie die Länge der schiefen Ebene zu eben dieser Höhe, während doch die Endgeschwindigkeiten nach den einfachsten Sätzen der Mechanik gleich sein müssten, also auch die Kräfte, was sich widerspreche. Besser kämen hiebei die Cartesianer weg, indem sie auf die Zeit Rücksicht nähmen.

Auch die Beweise, welche die Leibnitzianer aus der Lehre von der Bewegung elastischer Körper schöpften, werden verworfen.

Den Schluss der Leibnitzianer, als ob ein elastischer Körper nie im stande sei, in denjenigen, welchen er stösst, soviel Bewegung hineinzubringen, als wirklich geschieht, wenn seine Kraft sich nur wie seine einfache Geschwindigkeit verhielte, findet Kant in den eigenen Werken derselben widerlegt; denn man lese nur von Wolffs Mechanik, so werde man Beweise finden, welche keinen Zweifel übrig liessen, dass die elastischen Körper, dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ganz gemäss, alle die Bewegungen anderen Körpern erteilten, ohne dass man nötig hätte, in ihnen eine andere Kraft als die blosse Geschwindigkeit zu setzen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung sucht Kant wieder an einem Beispiele Hermanns (siehe Seite 86.) zu zeigen. Man stelle sich die elastische Kraft der Kugel A durch die Feder AD und die von B durch die Feder BD vor; dann

wird A solange mittelst der Feder in B neue Drückungen bringen, bis sich A und B mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, was dann geschieht, wenn beide sich mit der Geschwindigkeit $^1/_2$ in der Richtung von A bewegen. Die Wirkung ist also hier noch der nach der Geschwindigkeit gemessenen Kraft proportional. Die Feder DB aber wird durch die Anstrengung der anderen Feder mit ebenderselben Kraft zusammengedrückt werden, als sie in die Kugel B hinein bringt; ebenso wird die Kugel A ihre Feder mit ebendemselben Grade zusammendrücken, womit diese im Punkte D auf die Feder DB wirkt. Die Kraft, womit DB gespannt wird und die Kraft, womit AD zusammengedrückt wird, sind also beide so gross als die Kraft, welche B erhalten hat. Wenn also beide Federn aufspringen, so gibt DB der B die Geschwindigkeit $^1/_2$, AD aber der A dreimal mehr Geschwindigkeit. B hat also von dem Stosse des A und von dem Aufspringen der Feder 1 Grad Geschwindigkeit in der einen Richtung, A aber $^1/_2$ Geschwindigkeit in derselben und $1\,^1/_2$ in der entgegengesetzten, also 1 Grad in der entgegengesetzten Richtung, ein Fall, den Hermann durch Cartesius' Gesetz zu erklären für unmöglich gehalten habe. Der Fehler in der Betrachtung Hermanns liegt nach Kants Ansicht darin, dass er meinte, Zustand und Grösse der Kraft nach dem Stosse sei einzig und allein Wirkung der Kraft, die vor dem Stosse in den Körpern vorhanden war; denn die Wirkung der Kraft des A war nur die, dass sich beide Kugeln mit der Geschwindigkeit $^1/_2$ fortbewegten; das Zusammendrücken der Federn aber war eine Folge der Trägheit beider Körper. Ja Kant meint sogar bei unelastischen Körpern sei im Augenblicke des Stosses mehr Kraft vorhanden als vor demselben, in Folge der Wirkung und Gegenwirkung derselben, nur gehe sie bei diesen verloren, bei elastischen Körpern aber werde sie aufbehalten. Die elastischen Körper seien daher diejenigen Maschinen der Natur,

durch welche die Kraft aufbewahrt werde, welche im Momente des Zusammenstosses in der Natur vorhanden sei. Damit habe er auch einen Beweis für eine in diesem Sinne ausgesprochene Ansicht Mairans beigebracht, welche die Marquise von Chastelet als unannehmbar erklärt habe, solange ein Beweis hiefür fehle. — Jurin machte bekanntlich den Einwurf, dass zwei unelastische Körper mit Geschwindigkeiten, welche ihren Massen reciprok sind, nach dem Stosse in Ruhe kämen; man hat hier also nach der Lehre von den lebendigen Kräften Körper, die beliebig ungleich sich dennoch im Gleichgewichte erhalten könnten. Bernoulli sucht denselben zu widerlegen, indem er die Elasticität der Körper durch eine zwischengelegte Feder ersetzt; bei Ausdehnung derselben seien die Geschwindigkeiten der Körper im gegenseitigen Verhältnisse der Massen. Die Teile der Feder bewegten sich nach entgegengesetzten Seiten und der Punkt der Teilung sei da, wo die Feder im umgekehrten Verhältnisse der Massen geteilt würde. Da sich nun die Kräfte, welche in die Körper gebracht wurden, verhielten wie die Zahlen der Federn, so seien die Kräfte der Körper ungleich, wiewohl ihre Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnisse der Massen stünden.

Diesen Beweis kann aber Kant nicht anerkennen; denn es sei unstreitig sicher, dass die Feder in beide Körper die gleiche Kraft bringe. Die Kräfte verhielten sich also nicht wie die Teile der Feder. Die Quelle dieses falschen Beweises findet Kant in dem Satz der Leibnitzschen Partei, dass die Kraft eines Körpers sich verhalte wie die Zahl der Federn, welche auf ihn gewirkt habe. Dann ergäben sich aber zwei wichtige Folgen wider die lebendigen Kräfte: einmal, dass sich die Kraft, die ein Körper durch den Druck von Federn erhält, nicht wie deren Zahl verhält, sondern vielmehr wie die Zeit der Wirkung; zweitens dass ein Körper mit der Masse 1 und der Geschwindigkeit 3 nicht mehr Kraft habe

als ein solcher mit der Masse 3 und der Geschwindigkeit 1.

Auch die Verteidigung der lebendigen Kräfte durch die beständige Erhaltung einerlei Kraftgrösse in der Welt, kann Kant nicht anerkennen, wenigstens nicht in der Weise, wie sie von den Leibnitzianern geübt wurde. Denn weil sie im mathematischen Verstande nirgends Platz finden könnten, so rette sich die Macht und Weisheit Gottes, für welche es Leibnitz unpassend gefunden habe, dass sie die Bewegung fortwährend erneuern müsse, schon selbst durch die Betrachtung der gänzlichen Unmöglichkeit der Sache. Er (Kant) wolle die Existenz der lebendigen Kräfte durchaus nicht leugnen, nur suche er darzuthun, dass weder in einer abstrakten Betrachtung noch in der Natur die Kraft der Körper, mathematisch betrachtet, eine Schätzung nach dem Quadrate ergeben werde.

Der Einwurf Leibnitzens gründe sich auf die falsche Voraussetzung, dass keine Bewegung entstehe, als vermittelst einer Materie, welche auch in wirklicher Bewegung sei und dass also die Bewegung, welche in einem Teile der Welt verloren gegangen sei, nur durch eine andere Bewegung oder durch die Hand Gottes könne hergestellt werden. Eine Betrachtung der Natur zeige aber, dass ein Körper auch von einer Materie, welche in Ruhe ist, Bewegung empfangen könne.

Es lasse sich ferner zeigen, dass gegen Leibnitzens Behauptung bei dem Anstosse eines kleineren elastischen Körpers gegen einen grösseren nach dem Stosse mehr Kraft gefunden werde, als vor demselben; denn indem die Kugel A gegen die grössere B anlaufe, empfange B im Momente des Stosses und der Zusammendrückung der Feder, welche die Elasticität darstelle, nicht mehr Kraft, als er durch seine Trägheit in A vernichte und A verliere nicht mehr, als er in B hineinbringe nach dem Prinzipe der Gleich-

heit von Wirkung und Gegenwirkung. Nun sei die Feder gespannt und in beiden Körpern zusammen so viel Kraft vorhanden, als vorher in A allein. Die Feder dehne sich aber gegen beide Kugeln gleich stark aus. A habe ebensoviel Geschwindigkeit wie B und zwar in gleicher Richtung, aber weniger Masse, also auch weniger Kraft, als die Feder beim Losspringen ausübe; denn diese habe eine Kraft der Spannung gleich der Kraft von B. Also könne die Elasticität nicht so viel von der Kraft in A rauben, als sie B mitteile, woraus sich ein Überschuss an Kraft in A ergebe. Deutlicher ergebe sich das noch, wenn man annähme, dass ein grösserer elastischer Körper gegen einen kleineren stosse; in diesem Falle werde nämlich, wie Kant nachweist, die Kraft nach dem Stosse dieselbe sein wie vor demselben; in jedem anderen Falle aber grösser.

Die Berechnung bestätige auch, dass in dem Falle da ein grösserer Körper einen kleineren stosse, nach dem Cartesianischen Gesetze dieselbe Kraftgrösse bleibe.

Bei dieser Gelegenheit widerlegt Kant auch den Einwurf, welchen die Marquise von Chastelet gegen Mairan erhoben hatte (siehe Seite 142) als ob man einem Körper, der sich in entgegengesetzter Richtung zu einem anderen Körper bewege, nicht das Zeichen minus geben dürfe.

Es spreche ferner nicht zu Gunsten der Leibnitzianer, dass sie dem Stosse unelastischer Körper, der doch zur Untersuchung der lebendigen Kräfte viel günstiger sei als der elastischer, weil sich hier die Federkraft nicht mit einmische, so ängstlich aus dem Wege gingen. Die Annahme, dass bei ihrem Zusammenstosse ein Teil der Kraft verloren ginge, indem er zum Zusammendrücken der Körperteilchen verwendet werde, sei die schlechteste, die man je gemacht habe. Der Ursprung derselben sei in der irrigen Meinung der Anhänger der lebendigen Kräfte zu suchen, als könnten die Regeln, welche eine rein mathematische Betrachtung un-

elastischer Körper darbiete ohne die Eigenschaft, welche ein solcher in der Natur habe, nicht bestehen, dass nämlich seine Teile beim Stossen wichen und eingedrückt würden. Aber diese Schwierigkeit sei ganz ohne Grund. Denn in der Mathematik verstehe man unter einem unelastischen Körper einen solchen, der in sich keine Kraft habe, einen gegen ihn stossenden Körper zurückzustossen; um Zusammendrückungen der Teilchen kümmere man sich dabei gar nicht, wie sie sich auch darum nicht kümmern, woraus in der Natur die Elasticität entstehe. Also könne man bei einer mathematischen Betrachtung unelastische Körper als völlig hart ansehen. Die Natur biete übrigens selbst Beispiele dar, dass nicht immer derjenige Körper unelastischer sei, dessen Teilchen mehr weichen als die eines anderen; so sei auch in der Natur ein Körper nicht deswegen unelastischer, weil seine Teile eingedrückt würden, sondern nur deswegen, weil sie sich nicht mit eben der Kraft wiederherstellten, mit welcher sie eingedrückt worden. Wenn ferner eine Kugel A auf eine solche B stosse, so verzehre A, indem es in seinem Stosse die Teile eindrücke, nichts von seiner Kraft, was nicht B bekäme; es gehe also kein Teil verloren, noch viel weniger ein so grosser, wie die Leibnitzianer meinten. Da man endlich ohne ein genau bestimmtes Verhältnis der Härte des Körpers zur Gewalt des Stosses gar nicht verstehen könne, ob ein Eindruck der Teile geschehe und welcher Teil von Kraft verloren gehe, dieses Verhältnis von Seiten der Leibnitzianer aber ganz unberücksichtigt bleibe, so sei die Ursache, weswegen die Gesetze des Stosses unelastischer Körper so und nicht anders lauteten, nicht in der Eindrückung der Teile zu suchen. Aus dem allen gehe aber hervor, dass die lebendigen Kräfte überhaupt nicht in das Gebiet der Mathematik gehörten.

Ja der Stoss unelastischer Körper hebe die lebendigen Kräfte ganz und gar auf und ihre Existenz könne daraus

niemals erwiesen werden. Der Gedankengang des Kantschen Beweises hiefür ist kurz folgender: Die Grösse der Ursache erkennt man an ihren Wirkungen; man darf also in dem gestossenen Körper nur die Kraft nehmen, welche Wirkung des stossenden ist, und zwar unmittelbar nach dem Stosse. In diesem Momente hat er nun zwar schon alle Kraft des stossenden, aber noch keine Bewegung; diese Kraft ist demnach eine tote und ihr Mafs die einfache Geschwindigkeit. Folglich kann nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung auch die Kraft des stossenden nur der einfachen Geschwindigkeit und nicht ihrem Quadrate proportional sein. Wenn nun die Kraft in dem gestossenen Körper, sobald er sich wirklich bewegt, grösser sein sollte als im Momente des Stosses, so kann dies nicht eine Folge des Stosses sein und demnach kann diese Kraft kein Mafs für die Kraft des stossenden sein. —

Es schliesst sich hieran eine Kritik der Bülffingerschen Untersuchungen (siehe S. 97). Der dort mitgeteilte Beweis mit Hilfe zusammengesetzter Bewegungen sei im Grunde der Sache vollkommen richtig; nur die Anwendung derselben sei fehlerhaft; denn der Körper welcher in der Diagonale eines Rechtecks laufe, habe nur in Bezug auf die beiden Seiten, gegen welche die Seitenkräfte senkrecht wirkten, dieselbe Wirkung wie diese; damit sei aber nicht bewiesen, dass er auch gegen einen auf der Diagonale senkrechten Gegenstand die gleiche Wirkung habe wie jene. Denn wenn man von der Kraft eines Körpers spreche, so meine man immer die Kraft, welche er auf einen Gegenstand, auf welchen er senkrecht anstösst, ausübe. An diese Bedingung habe sich aber Bülffinger nicht gehalten. Berücksichtige man aber dies, so dürfe man nur jede der beiden Seitenbewegungen in zwei rechtwinklige Komponenten so zerlegen, dass die eine derselben in die Richtung der Diagonale falle, so werde man sehen, dass in diesem Sinne die beiden in die Diagonale fal-

lenden Komponenten der Seitenbewegungen der Diagonalbewegung gleich seien, während die beiden anderen Bewegungen sich aufheben, woraus hervorgehe, dass nur ein Teil der Seitenbewegungen in der Diagonale vorhanden sei. Daraus folge aber, dass die Kraft in der Diagonale immer kleiner sei als die Seitenkräfte und dass demnach auch hiermit die Schätzung derselben nach dem Quadrate der Geschwindigkeiten nicht erwiesen werden könne.

Ja man könne gerade aus dem Bülffingerschen Satze einen neuen Beweis für Cartesius' Mafs finden; denn die Diagonalbewegung sei gerade aus den in die Diagonale fallenden Komponenten der Seitenbewegungen zusammengesetzt, was nur dann möglich sei, wenn man als Mafs der Kraft die erste Potenz der Geschwindigkeit setze. Denke man sich ferner, es stiessen zwei gleiche Kugeln in der Richtung der Seitenbewegungen mit Geschwindigkeiten, deren Mafse diese Seiten seien, auf einen Körper, so ergebe sich, dass diese Kugeln nicht ihre ganze Kraft auf denselben übertragen, sondern nur eine solche Kraft, die sich zu den Kräften, aus welchen sie zusammengesetzt ist, lediglich wie die einfache Geschwindigkeit zu den Geschwindigkeiten derselben verhalte und nicht wie ihre Quadrate.

Die Wirkung, welche ein Körper in schräger Richtung ausübe, bis all seine Kraft erschöpft sei, sei immer grösser als die welche er durch einen perpendikulären Stoss ausüben würde. Daraus folge aber ein neuer wesentlicher Unterschied des Leibnitzschen und des Cartesiusschen Mafses; denn darin seien alle Mechaniker einig, dass, wenn ein Körper nach einander gegen viele Flächen in schräger Richtung anstosse, die Bewegung aufhöre, wenn die Summe der Quadrate der Sinuse der Einfallswinkel dem Quadrate des Sinus, welcher die Geschwindigkeit seiner ersten Bewegung anzeige, gleich sei. Daraus ergebe sich nach Leibnitz, dass der Körper dann seine Bewegung verliere, wenn die Summe aller in schräger

Richtung ausgeübten Kräfte gleich der Kraft in gerader Richtung sei, nicht so aber nach Cartesius; nach diesem sei die Summe jener Kräfte viel grösser als letztere Kraft. Irgendwo in der Natur müsste sich eine Wirkung zeigen, um zu entscheiden, welches die richtige Anschauung sei; eine solche Wirkung sei die Centralbewegung eines Körpers. Man könne nämlich die Kraft, welche ein Körper bei einer solchen Bewegung gegen die Schwere ausübe mit dem Anlaufe derselben gegen eine schiefe Fläche vergleichen. Die Geschwindigkeit bei einer Centralbewegung sei nun erstens endlich und zweitens unendlich während; ferner bringe und verzehre die Schwere in endlicher Zeit in einem sich frei bewegenden Körper eine endliche Kraft; der Körper werde also mit einer endlichen Kraft gegen das Centrum getrieben; aber er halte durch seine Kraft dieser endlichen Kraft fortwährend Gleichgewicht. Nun müsse ein Körper, welcher in schiefer Richtung eine gewisse Zahl von Hindernissen überwunden habe, einen endlichen Teil seiner Kraft verlieren, d. h. er müsste bei der Centralbewegung allmählich seine ganze Kraft verlieren, was nicht der Fall sei. Ein Körper könne also bei schiefem Anlaufe unendlich viel mehr ausrichten als bei geradem und das widerspreche vollständig dem Leibnitzschen Mafse. Nach Cartesius aber lasse sich dieser Fall ganz gut verteidigen; denn hier verliere der Körper bei einer Centralbewegung nicht eher eine endliche Kraft, als bis er in der ganzen Summe aller der Zurückhaltungen der Schwere eine Kraft, die unendlich ist, überwunden habe, was aber erst in unendlicher Zeit der Fall sei. Aus diesen Untersuchungen ergebe sich aber noch ein greller Widerspruch der lebendigen Kräfte; denn die nach dem Quadrate geschätzten Kräfte müssten doch mehr Gewalt haben als die nach der blossen Geschwindigkeit gemessenen, wovon sich aber bei der Centralbewegung gerade das Gegenteil ergeben hätte.

Wenn man nun aber zugeben müsse, dass die Wirkung einer Kraft in schiefer Richtung grösser sein könne als in gerader, so falle auch der Seite 71 mitgeteilte Beweis Bernoullis. Der Körper könne nämlich am Ende der ganzen Bewegung wohl die Kraft 4 haben; in gerader Richtung habe er aber doch nur die Kraft 2 und letztere sei die wahre Kraft des Körpers. Aus demselben Grunde lasse sich auch ein von Hermann mitgeteilter Fall zurückweisen, der offenbar dem Seite 70 mitgeteilten Beispiele Bernoullis nachgebildet ist und den auch Frau von Chastelet erwähnt (Seite 140).

Die Arbeit Mairans, welche wir pag. 123 kennen gelernt haben, erwähnt Kant mit grossem Lobe; ja die Methode, nach welcher Mairan dort vorgegangen sei, sei die Hauptquelle seiner Arbeit, weil sie eine solche sei, mittelst deren man in jedem Falle abnehmen könne, ob auch die Natur der Vordersätze alles in sich fasse, was in Hinsicht der daraus geschlossenen Lehren gefordert werde. Erst mit Hilfe derselben habe er erkannt, dass die Wirklichkeit der Bewegung nicht wie die Leibnitzianer meinten, die Bedingung des Kräftemafses sein könne und dass die Schlüsse, welche die Mathematik daraus ziehe, nicht sicher seien. Ja der Mangel einer solchen Methode habe, wie in anderen Dingen, so auch hier dem menschlichen Verstande zu Irrtümern Anlass gegeben. Mit Hilfe dieser Methode lasse sich unter anderem aber erkennen, dass die Beweise für die lebendigen Kräfte, welche aus der Zusammensetzung der Bewegungen geschöpft worden seien, deshalb nicht stichhaltig seien, weil die Einschränkung von der Wirklichkeit der Bewegungen gegenüber den toten Drucken ein müssiger Begriff sei, aus dem eine mathematische Betrachtung nichts folgern könne, woraus sich von vorneherein mutmassen lasse, dass diese Betrachtungen überhaupt nicht richtig seien. Auch Bülffingers Einwände gegen Mairans Untersuchungen (siehe

Seite 98) liessen sich mit Hilfe dieser Methode widerlegen. Bülffinger habe wohl bemerkt, dass man ihm einwenden könne, seine Beweise müssten ebenso für die Zusammensetzung toter Drucke giltig sein; er habe sich zwar dagegen durch metaphysische Unterscheidungen zu schützen gesucht, mit denen aber dem Mathematiker nicht gedient sei. Aus diesen metaphysischen Untersuchungen könne zwar vielleicht fortgesetzte philosophische Erwägung einige Gründe zum Vorteile der lebendigen Kräfte ziehen, aber zur Aufrechterhaltung des mathematischen Beweises seien sie unzulänglich.

Kant wendet sich nun gegen den von Leibnitz selbst erdachten Beweis für das Mafs der lebendigen Kräfte (siehe Seite 17). Keiner von all den anderen Beweisen komme diesem an Erfindung und scheinbarer Stärke gleich; aber auch dieser sei fehlerhaft. Leibnitz hätte nicht sagen sollen, der Zurückfall der Kugel A sei eine Wirkung der auf B übertragenen Kraft; diese Kraft sei zwar der nachfolgende Zustand in der Materie, der vermittelst der in B übergetretenen Kraft veranlasst worden, aber trotzdem keine Wirkung dieser Kraft; darin liege der Fehlschluss dieses Beweises; dann sei aber auch die immerwährende Bewegung in diesem Falle keine Ungereimtheit, weil die hervorgebrachte Wirkung nicht die wahre Wirkung der aufgewandten Kraft sei. B wende alle empfangene Kraft im Laufe über die schiefe Ebene auf; wenn er nun auf den Balken der Wage gerate, so sei es nicht mehr die vorige Kraft, sondern die erneuerte Kraft der Schwere, welche den Körper A in die Höhe hebe. Und die Kraft, welche A erlange, um aus $A_4$ nach $A_1$ zurückzukehren, sei wiederum Wirkung einer neuen Ursache, nämlich der Schwere, welche dem Körper im freien Falle mitgeteilt werde. Die Kraft, womit A mechanische Wirkungen ausübe, sei also zwar durch die Kraft von B veranlasst, das ist gewissen mechanischen Ursachen übergeben worden, aber sie habe diese nicht selbst zur hervorbringenden Ursache.

Die Leibnitzianer sagten, in dem nachfolgenden Zustande sei allemal gerade nur so viel Kraft als im vorhergehenden; aber gerade aus der Anwendung der Wage folge in diesem Beispiele, dass der nachfolgende Zustand unstreitig grösser sei als der vorhergehende.

Auch aus dem Gesetz der Kontinuität lasse sich die Unrichtigkeit dieses Falles erweisen; denn wenn man setze, dass der Körper $B_1$ nur um beliebig weniger als 4 Grad Geschwindigkeit habe, so erlange $A_3$ gar keine Kraft mehr, während doch nach jenem Prinzipe eine kleine Verminderung der Ursache nur eine kleine Verminderung der Wirkung nach sich ziehen könnte. Daraus folge aber wiederum, dass die Kraft in $B_3$ nicht die wahre Ursache des Zustandes in der Maschine sein könne.

Alles, was Leibnitz also mit seinem Argumente entgegensetzen könne, bestehe darin, dass überhaupt eine Kraft eine andere grössere erwecken könne, es möge nun auf eine Art geschehen, wie sie wolle; allein auch das sei von keiner Beständigkeit; denn hier handle es sich um eine Schätzung der Kräfte mit Hilfe der Mathematik; diese müsse aber mit den Lehren der Metaphysik zusammengenommen werden, wenn man sie auf die Natur anwenden wolle. Die Cartesiussche Schätzung sei der Natur zuwider, also jedenfalls nicht das wahre Maſs der Natur; das hindere aber nicht, dass sie das wahre Maſs der Mathematik wäre. Papin habe Leibnitz schon widersprochen (siehe Seite 21), aber sehr unglücklich. Papin leugnete bekanntlich die Möglichkeit der Übertragung der ganzen Kraft aus A nach B und Leibnitz zeigte hierauf, dass die wirkliche Übertragung der Kraft kein wesentliches Stück seines Beweises sei (Seite 25). Damit habe er aber, sagt Kant, etwas zugegeben, was zur Hauptsache nicht gehöre, was aber, wenn es angenommen werde, den Hauptpunkt im Beweise gänzlich umkehre.

Wir haben pag. 22 gesehen, dass Papin bestritt, ein

viermal kleinerer Körper könne an der viermal grösseren Hebelstange dieselbe Wirkung hervorbringen, wie der einfache an der einfachen Stange. Aber seine Gründe seien so schwach gewesen, dass Leibnitz bei seiner Behauptung stehen blieb. Kant beweist nun, dass in der That ein vierfacher Körper durch einen Stoss auf einen Hebel einem einfachen 4 Grade Geschwindigkeit mitteilen könne. Das hätte Papin gerade zugeben sollen; damit hätte er ja gezeigt, dass ein Körper mit der Masse 1 und der Geschwindigkeit 4 dieselbe Kraft habe, wie ein solcher mit der Masse 4 und der Geschwindigkeit 1. Das wäre aber gerade ein Beweis gegen das Mafs Leibnitzens gewesen.

Den Beweis Wolfs glaubt Kant nicht wegen seines inneren Wertes, sondern nur wegen des Ansehens seines Verfassers anführen zu sollen (siehe Seite 75); es sei nur sehr schwer, den rechten Beweis aus der grossen Reihe von vorhergehenden Sätzen herauszusuchen. Der Grundsatz, auf welchem sein ganzes Gebäude beruhe, sei der, dass, wenn zwei Bewegliche sich über ungleiche Räume bewegten, die unschädlichen Effekte sich verhielten wie diese Räume. Wolf habe zwar versprochen einen Beweis für diesen Satz beizubringen, aber das Versprechen nicht gehalten; er habe einem Körper, der sich im leeren Raume bewegt, gewisse Wirkungen beigelegt und sich dieser als Mafs der Kräfte bedient; er habe sich nur auf den Satz gestützt, dass ein Körper vermöge seiner Kraft, die er bei wirklicher Bewegung besitze, seine eigene Masse durch einen Raum trage, wodurch seine Kraft etwas geleistet habe. Der Punkt seines Irrtums beruhe auf der falschen Voraussetzung, dass, wenn ein Körper durch denselben Raum gehe, er dieselbe unschädliche Wirkung ausübe. Es sei nicht genug, dass der Raum derselbe sei, wenn die Wirkung die gleiche sein solle, sondern man müsse auch die Geschwindigkeit in Erwägung ziehen, mit welcher derselbe durchlaufen werde. Sei dieselbe

nicht gleich, so sei auch die Wirkung nicht dieselbe. Um das einzusehen, dürfe man sich den Raum nur mit einer sehr dünnen Materie erfüllt denken, so werde man einsehen, dass der Körper mit etwa doppelter Geschwindigkeit auch allen Teilchen seines Raumes zweimal mehr Geschwindigkeit mitteile, als ein solcher mit einfacher Geschwindigkeit; ihre Wirkung seien also nicht die gleichen. Aus diesem Irrtume ergebe sich aber die Unrichtigkeit des Satzes, dass die unschädlichen Wirkungen sich verhalten wie die Massen, Zeiten und Geschwindigkeiten. Denn wenn auch der Körper, der in kleinerer Zeit seine Wirkung vollende, eben deswegen, weil die Zeit kleiner war, eine grössere Aktion ausübe, so könne doch nicht ein Körper wegen der Kleinigkeit seiner Masse eine grössere Aktion vollbringen; daraus ergebe sich vielmehr eine Kleinheit der Aktion; und wenn er trotzdem in gleicher Zeit die gleiche Wirkung vollbringe wie ein anderer, so könne das nur Folge einer grösseren Geschwindigkeit sein. Daher sei es nicht einerlei, ob die Massen ungleich und die Zeiten gleich oder ob die Zeiten ungleich und die Massen gleich seien. Daraus folge aber, dass das ganze auf diesen Sätzen aufgebaute System falsch und das Vorhaben Wolfs, eine Dynamik zu liefern, missglückt sei. —

Nachdem Kant mit den Widerlegungen der verschiedensten Verteidigungsschriften bereits am Ende war, kam ihm noch die Abhandlung Musschenbröks zu Handen (siehe S. 171), deren ersten mathematischen Teil er folgenderweise widerlegt: Wenn man die auf einen Körper übertragene Kraft nach der Summe gewisser Federn schätzen wolle, so dürfe man nur diejenigen Federn nehmen, welche ihre Gewalt wirklich in den Körper hineinbrächten; das gebe Musschenbrök selbst zu, wenn er sage: wie sich die Zahl der Kräfte, welche auf einen Körper wirkt, verhält, so verhält sich auch die in demselben hervorgebrachte Kraft. Wenn aber ein Körper schon n Grad Geschwindigkeit besitze, so

erteile ihm unter den $(n + 1)$ gleichen Federn nur eine ihre Kraft und den $(n + 1)^{ten}$ Grad der Geschwindigkeit. Also mache nur die Summe aller letzten Federn die Kraft des Körpers aus und die Kraft sei demnach nur wie die Geschwindigkeit, nicht wie ihr Quadrat.

Kant liefert selbst noch einen Beweis gegen das Leibnitzsche Mafs: Man denke sich eine Schnellwage, an deren einem, viermal längeren Arme eine viermal kleinere Masse wirke, als am anderen; dann werde Gleichgewicht herrschen. Lasse man nun einmal an dem Arme 1 ein kleines Gewichtchen e wirken und ein andermal am Arme 4 das Gewichtchen $\frac{e}{4}$, so werde in beiden Fällen die Wirkung die gleiche, also auch die Kraft die nämliche sein. Die Geschwindigkeiten dieser Gewichtchen verhielten sich aber umgekehrt wie ihre Massen, woraus sich ergebe, dass die Schätzung nach dem Quadrate der Geschwindigkeit falsch sei.

Das Beispiel Jurins, in welchem er einem auf einem mit der Geschwindigkeit 1 bewegten Kahne befindlichen Körper durch eine Feder in derselben Richtung die Geschwindigkeit 1 erteilen lasse, zeige deutlich, dass die Verdoppelung der Geschwindigkeit nicht mehr als die Verdoppelung der Kraft nach sich ziehe und nicht wie die Leibnitzianer meinten, eine Vervierfachung. Der Einwand, welchen Frau von Chastelet hiegegen erhob, indem sie sagte, die Feder bringe durch ihren Widerhalt in den beweglichen Kahn eine Geschwindigkeit, sei ein Trugschluss; man dürfe sich nur vorstellen, der Kahn sei von unendlich grosser Masse, dann werde er dem endlichen Drucke der Feder nur unendlich wenig, d. h. gar nicht weichen. Der Einwand, welchen aber Richter (s. S. 166) erhebe, sei geradezu unverständlich; denn es sei nicht einzusehen, woher der Körper hinsichtlich der ausserhalb des Kahnes befindlichen Gegenstände eine dreifache Kraft erhalten sollte, wie jener annehme. Was er

aber sonst noch sage, beruhe auf dem bereits widerlegten Satze der Leibnitzianer, dass die Kraft vor und nach dem Stosse elastischer Körper dieselbe sei.

Endlich findet sich in den „Erläuterungen und Zusätzen“ noch folgender Beweis gegen Leibnitzens Mafs: Ein Körper, welcher eine Parabel durchlaufe, müsste nach diesem Mafse sowohl eine gewisse Höhe weit schneller durchlaufen, als auch mit einer viel grösseren Kraft und Geschwindigkeit am Ende seiner Bahn ankommen, als dies beim senkrechten Falle von gleicher Höhe eintreten würde; denn weil er dabei einen grösseren Raum durchlaufe, sei er auch einer grösseren Zahl von Drücken der Schwere unterworfen. Diese Konsequenz sei aber unstatthaft.

Nachdem nun Kant, wie er selbst sagt, fast sämtliche Beweise, welche zu gunsten des Leibnitzschen Mafses aufgestellt waren, widerlegt und gezeigt hat, dass ein mathematischer Beweis desselben nicht möglich sei, wendet er sich im dritten Hauptstück dazu, eine neue Schätzung der Kräfte als das wahre Kräftemafs der Natur darzulegen.

Vor allem wird gezeigt, dass ein Gesetz, das sich mathematisch nicht nachweisen lasse, in der Natur ganz gut existieren könne, weil eben die Mathematik nicht mit natürlichen Körpern rechne, sondern mit mathematischen, d. h. mit solchen, denen gewisse Eigenschaften der natürlichen Körper abgehen. So erlaube die Mathematik nicht, dass ihr Körper eine Kraft habe, welche nicht von demjenigen, welcher die äusserliche Ursache seiner Bewegung sei, gänzlich hervorgebracht sei; anders sei es mit dem natürlichen Körper; derselbe habe in sich das Vermögen, eine von aussen beigebrachte Kraft von selbst in sich zu vergrössern.

Geschwindigkeit schliesst an und für sich keinen Begriff der Kraft in sich; denn sie ist eine Bestimmung der Bewegung, das ist desjenigen Zustandes des Körpers, da er seine Kraft nicht anwendet; sie ist die Zahl der Kraft, welche

der Körper bei unendlich kleiner Geschwindigkeit hat. Ein Körper würde gar keine Kraft haben, wenn er nicht bestrebt wäre, einen Zustand, welcher ein Hindernis aufheben soll, in sich zu erhalten. Bewegung ist die äussere Erscheinung der Kraft; das Bestreben aber, diese Kraft zu erhalten, ist die Basis der Aktivität und die Geschwindigkeit zeigt an, wie oft man dieselbe nehmen müsse, um die ganze Kraft zu erhalten. Jene soll Intension heissen und die Kraft ist demnach das Produkt aus Intension und Geschwindigkeit.

Ist die Kraft bestrebt, die Bewegung nur einen Augenblick zu erhalten, so ist die Intension bei allen Geschwindigkeiten gleich und die Kraft ist in diesem Falle der Geschwindigkeit proportional. Wenn aber die Kraft bestrebt ist, von selbst eine Bewegung einförmig und unendlich zu erhalten, so muss ihre Intension der Geschwindigkeit und folglich die Kraft dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein; denn wenn der Körper Geschwindigkeit und Kraft in sich gründen soll, damit er die Bestrebung habe, sie in sich zu erhalten, so muss seine Intension derselben proportional sein, während sie in obigem Falle unendlich klein ist.

Eine Kraft ist in dem Augenblicke, da sie durch äussere Einwirkung entsteht, von unendlich kleiner Intension, also der einfachen Geschwindigkeit proportional und demnach tot. Nimmt aber der Körper diese Geschwindigkeit so in sich auf, dass aus seiner Bestrebung eine freie Erhaltung der Bewegung folgt, so ist seine Kraft lebendig und hat das Quadrat der Geschwindigkeit zum Maſse. Daraus folgt aber, dass die lebendigen Kräfte nicht in das Gebiet der Mathematik gehören. Von aussen kann also ein Körper niemals lebendige Kraft erhalten, sondern nur aus einer inneren Quelle seiner Naturkraft.

Aus dem oben Gesagten folgt ferner, dass es zwischen der toten und der lebendigen Kraft unendlich viele Zwischengrade gibt, weil ein Körper seine Kraft zwar etwas, aber

noch nicht völlig in sich gründen kann. Weiter ergibt sich hieraus, dass ein Körper lebendige Kraft erst in endlicher Zeit erlangen kann; das Gegenteil widerspräche dem Kontinuitätsprinzipe; denn im Anfangspunkte der Bewegung ist die Kraft tot; sollte sie also in unendlich kleiner Zeit lebendig sein, so bedeutete dies einen Sprung. Man kann also von einer Lebendigwerdung oder Vivifikation der Kraft sprechen. Während derselben entspringt in dem Körper jeden Augenblick ein neues Element der Intension, welches die gegebene Geschwindigkeit ein unendlich kleines Zeitteilchen lang erhält.

Ein Körper, welcher seine Geschwindigkeit in freier Bewegung ins Unendliche unvermindert erhält, hat demnach lebendige Kraft. Aber nur unter den angegebenen Bedingungen kann das Gesetz bestehen.

Die lebendigen Kräfte werden also in die Natur aufgenommen, nachdem sie aus der Mathematik verwiesen worden; aber auch hier kann das Leibnitzsche Gesetz erst stattfinden, nachdem es durch Cartesius' Schätzung gemässigt worden.

Nun gibt es aber in der Natur freie Bewegungen, wie die freie und immerwährende Bewegung der Planeten; also gibt es auch lebendige Kräfte; nicht aber in der Mathematik, weil sie nicht zugibt, dass ein Körper aus sich eine Bewegung erhalte.

Bernoulli habe bereits diesen Gedanken gehabt, sagt Kant, wenn er behaupte, lebendige Kraft sei etwas Reelles und Substantielles; er habe sich nur darin geirrt, dass er sie in der sich ausdehnenden Feder zu finden wähnte, während in ihr doch nur tote Kraft stecke. Weil aber die Existenz der lebendigen Kräfte von der Existenz freier Bewegung abhänge, und weil man aus den wesentlichen und geometrischen Eigenschaften eines Körpers diese Möglichkeit nicht erkennen könne, so könnten die lebendigen Kräfte nicht als eine notwendige Eigenschaft erkannt werden und blieben demnach etwas Hypothetisches. Leibnitz habe dies erkannt und auch

Nik. Bernoulli, indem er die Bedingungsgleichung voraussetzte $dv = p \cdot dt$; und dennoch hätten die Verteidiger der lebendigen Kräfte dieselben in Fällen gesucht, welche durchaus geometrisch notwendig seien. Einen grossen Fehler habe auch Herrmann begangen, indem er sagte, man müsse die Masse M und das Element der Geschwindigkeit $g dt$ zusammennehmen und deshalb sei $dv = M g dt$, während doch aus dem Zusammennehmen noch nicht folge, dass man sie multiplizieren müsse. —

Die Erfahrung lehre, dass die Intension eines Körpers während seiner Bewegung wachse und erst nach einer gewissen Zeit ihre rechte Grösse habe.

Aus dieser Schätzung der Kräfte folge aber, einmal dass die Grösse der Geschwindigkeit, bei welcher die Lebendigwerdung der Kraft bestehen kann, unter eine gewisse endliche Grenze nicht herabsinken könne und dies bestätige auch die Erfahrung; sie könne aber auch über eine gewisse obere endliche Grenze nicht hinaufsteigen, weil dies eine unendliche, innere Naturkraft eines Körpers voraussetzte, während doch keine Grösse der Natur wirklich unendlich sei.

Wie nun aber lebendige Kraft zum Teile von selber entstehe, so könne sie auch bei Überwältigung eines Hindernisses, das viel geringer sei als sie, vergehen. Dies folge aus der Umkehrung des Jurinschen Falles; denn wenn Kahn und Kugel sich in einer der früheren entgegengesetzten Richtung bewegen, ersterer mit der Geschwindigkeit 1 letztere mit 2, so werde diese das Hindernis R nur mit der Geschwindigkeit 1 treffen, weil das Hindernis selbst die Geschwindigkeit 1 in derselben Richtung habe; die Kugel verliere also 1 Grad Kraft; dann bleibe ihr aber nur 1 Grad Bewegung und 1 Grad Kraft, die durch ein anderes Hindernis 1 verloren werden möge. Ein Körper der also 2 Grade Geschwindigkeit und demnach 4 Grade Kraft habe, werde durch 2 Hindernisse mit der Kraft 1 in Ruhe versetzt, also

müssten 2 Grade Kraft in ihm verschwinden. Das komme daher, weil nach dem Verlorengehen des ersten Teiles Kraft die Natur aufhöre, die übrigen 2 zu erhalten, wie sie dieselben bei der Erzeugung von selbst hervorbringe.

Die volle Wirkung der lebendigen Kraft werde man also nur da finden, wo ein Hindernis der ganzen Geschwindigkeit des Körpers zugleich Widerstand leiste; wenn aber das Hindernis sich nur einem Teile der Geschwindigkeit widersetze, so werde immer ein Teil der lebendigen Kraft von selbst verschwinden. Wenn der Grad Geschwindigkeit, dem sich das Hindernis in jedem Augenblicke widersetzt, nur unendlich klein sei, so sei keine Spur von lebendiger Kraft mehr in den Hindernissen zu finden und deshalb finde sich auch nirgends lebendige Kraft in den überwältigten Hindernissen, wenn sie gleich in dem Körper wirklich vorhanden gewesen sei, als nur da, wo das Hindernis mit endlicher Geschwindigkeit widerstehe und auch diese dürfe nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken. Daraus ergebe sich auch, dass die Überwindung der Hindernisse der Schwere keine lebendige Kraft beweisen könne, wenn sie auch gleichwohl der Schätzung nach dem Quadrate Platz lasse; denn ein Körper würde beim senkrechten Aufstiege seine Bewegung nicht frei fortsetzen, wenn er nicht die Intension dazu aus sich hervorbrächte. Daher komme auch, dass weiche Körper niemals all ihre Kraft beim Stosse anwenden.

Alle Hindernisse in der Natur setzten der Kraft, welche sie brechen soll, im Berührungspunkte vorerst nur einen unendlich kleinen Grad von Widerstand entgegen. Daher ergebe sich auch ein Unterschied zwischen der Wirkung einer unendlich kleinen und der einer bestimmten endlichen Masse. Nun wirke der Gegendruck der Schwere nur mit unendlich kleiner Sollicitation auf die unendlich kleinen Teile des bewegenden Körpers; der Zustand derselben sei also gleich dem einer mit lebendiger Kraft versehenen unendlich kleinen

Masse; also werde auch eine solche ihre lebendige Kraft in sich verzehren und bei jedem Hindernisse nur ihrer Geschwindigkeit proportional wirken. Weil aber das Hindernis seinen Widerstand nur von aussen und nicht wie die Schwere nach innen wirke, so folge, dass ein endlicher Körper nur unendlich wenig von seiner Geschwindigkeit verliere, wo die unendlich kleine Masse ihre ganze Geschwindigkeit verliert. Aber auch die endliche Masse müsse eine bestimmte endliche Grösse haben, wenn ihre Wirkung der lebendigen Kraft proportional sein solle.

Daraus folge weiter, dass ein kleines Massenteilchen in Verbindung mit einer grossen Masse eine ganz andere Wirkung hervorbringen könne als allein; notwendig sei dieser Unterschied zwar nicht, aber er beruhe auf der zufälligen Eigenschaft der Natur, dass alle Hindernisse in unendlich kleinem Grade in die Ferne wirken.

Es sei ferner nicht unbedingt richtig, dass sich die Wirkungen zweier Körper mit lebendigen Kräften bei gleicher Geschwindigkeit wie ihre Massen verhielten. Ja sogar die Veränderung der Figur allein könne eine Änderung der Wirkung hervorrufen; man denke nur an die Wirkung einer goldenen Kugel und an die der gleichen Goldmasse, wenn sie zu einem Goldblatte geschlagen sei.

Die wichtigste Folge aber sei die, dass flüssige Körper durch den Stoss im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit wirken, wiewohl sie, wenn ihre Wirkungen den lebendigen Kräften proportional sein sollten, dies nach dem Würfel ihrer Geschwindigkeiten thun müssten. Das hebe zwar die Theorie Leibnitzens auf, nicht aber diese. Das komme daher, dass Flüssigkeiten, weil ihre Teilchen alle nacheinander wirken, einen Verlust an lebendiger Kraft erdulden wie unendlich kleine Körper und also nur im Verhältnisse ihrer einfachen Geschwindigkeit wirkten, wiewohl ihre Kraft wie das Quadrat derselben sei.

Endlich sei leicht einzusehen, dass Körper mit freier Bewegung und lebendiger Kraft in einem flüssigen Medium nach dieser Theorie wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeit Widerstand leisten, nicht wie die Kuben, was aus Leibnitzens Theorie folgen würde.

Für die Richtigkeit all dieser Sätze spräche aber auch die Erfahrung.

Was nun die Bewegungen elastischer Körper betreffe, so heben sie das Mafs Leibnitzens auf vermöge der Voraussetzung, dass die Wirkung der erzeugenden Kraft gleich sei; nicht aber dieses (das Kantsche) Mafs; denn hier seien die lebendigen Kräfte der gestossenen Körper nicht als Wirkungen der stossenden angesehen; und dann müsse doch jeder Mechanikverständige wissen, dass ein elastischer Körper in einen anderen mit seiner ganzen Geschwindigkeit nicht auf einmal wirke, sondern durch eine fortgesetzte Häufung unendlich kleiner Geschwindigkeitsgrade. Hieraus folge aber nach dem Vorhergehenden, dass der stossende Körper nur in schlechter Proportion seiner Geschwindigkeit wirke ohne Nachteil der lebendigen Kraft, welche er in sich haben könne.

Auch das Leibnitzsche Gesetz von der Erhaltung der Kraft könne in der bisherigen Bedeutung nicht gelten. Doch müsse vor dem Eindringen in diese Frage noch Musschenbröks mechanischer Beweis der lebendigen Kräfte untersucht werden (s. S. 175). Gegen denselben sei nun einmal zu erwähnen, dass die Momente des Druckes auch nach dem Geständnisse der Leibnitzianer nur tote Kräfte sind. Wenn man ferner von der ganzen Kraft einer Feder spreche, so könne man darunter nichts anderes als die Intension ihrer Spannung verstehen und diese sei gleich, möge nun der Körper, auf welchen sie wirkt, gross oder klein sein. Wenn man aber die Kraft betrachte, welche sie in einen Körper in einer gewissen Zeit durch ihre fortgesetzte Drückung hineinbringe, so sei die Grösse derselben offenbar von der Grösse

der Zeit der Drückung abhängig; je grösser aber die Zeit desto grösser sei die Kraft, welche die gespannte Feder demselben Körper erteile. Nun könne man aber die Zeit vergrössern, indem man die fortzustossende Masse vergrössere. Daher sei auch der Ausdruck widernatürlich, dass die Feder dem Körper ihre ganze Kraft erteile. Daher müsse auch bei dem Musschenbrökschen Beweise der schwerere Cylinder mehr Kraft von der Feder überkommen als der leichtere und folglich könnten diese Kräfte nicht nach dem Quadrate der Geschwindigkeiten gemessen werden. Die Ursache aber, warum die Quadrate der Geschwindigkeiten der Cylinder sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, komme daher, dass bei diesem Versuche die gleich gespannte Feder einem jeden Cylinder eine einförmig beschleunigte Bewegung mitteile, die durchlaufenen Räume aber gleich seien, die Quadrate der Geschwindigkeiten sich also wie die Momente der Geschwindigkeiten, d. h. umgekehrt wie die Massen der Cylinder verhielten.

Am Schlusse der Arbeit kommt Kant noch auf die experimentellen Beweise zu sprechen, welche zum Beweise der lebendigen Kräfte angestellt worden seien.

Wider die Versuche Ricciolis, s'Gravesandes, Polens und Musschenbröks hätten die Cartesianer nichts einzuwenden gewusst, nur um die Folgen habe man sich gestritten. Die Schlüsse der Leibnitzianer seien aber ganz richtig gewesen; denn die Kräfte, welche Kugeln, die in eine weiche Masse eindrängen, zur Trennung der Teilchen einer weichen Materie anwenden müssten, verhielten sich wie die Summen der zertrennten Teilchen; diese aber verhielten sich nach dem Versuche wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Gegen diesen Beweis hätten nun die Cartesianer wie bei den durch die Schwere überwältigten Hindernissen sich auf die Verschiedenheit der Zeit gestützt. Das sei aber falsch; denn wenn der Körper eine Feder der Schwere überwinde, so vernichte er ihre Wirksamkeit nicht, sondern leiste ihr nur Wider-

stand; jede Feder setze ihm also so lange Widerstand entgegen als er sich auf ihr befinde und deshalb komme hier die Zeit mit in Betracht. Bei der Trennung der weichen Materie aber nehme jedes Teilchen dem trennenden Körper den gleichen Grad Kraft, werde aber dadurch auch zertrennt und leiste weiter keinen Widerstand, wie lange er auch auf dasselbe wirke; denn hier werde die Feder sogleich zerbrochen und deshalb sei der Widerstand der Summe der zerbrochenen Federn ohne Rücksicht auf die Zeit, d. h. der Höhe proportional.

Der angeführte Versuch erweise also das Dasein von Kräften in der Natur, die das Quadrat der Geschwindigkeit zum Mafse haben; — allerdings könnten sie nur unter den Bedingungen statthaben, welche sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ergäben. Wenn man sich aber diese zu Nutze mache, so bekomme man nicht bloss eine hinlängliche Gewissheit der lebendigen Kräfte, sondern auch einen richtigeren und vollständigeren Begriff von ihrer Natur.

Nun müsse nur noch erwiesen werden, dass die Geschwindigkeit des Widerstandes dieser Elemente nicht unter jene endliche Grenze herabsinke, von der Seite 283 die Rede war, weil sich ja sonst die Kräfte nur wie die einfachen Geschwindigkeiten verhielten.

Man denke sich zu diesem Zwecke die Höhle, welche der kugelförmige Körper in der weichen Masse erzeuge, in Kreisscheiben mit unendlich kleiner Dicke zerlegt, dann nehme jede derselben dem Körper einen unendlich kleinen Teil seiner Geschwindigkeit; die Grösse einer solchen Scheibe sei aber unendlich klein im Verhältnisse zur Kugel; also müsse die Geschwindigkeit des Widerstandes von endlicher Grösse sein, damit sie dem Körper einen unendlich kleinen Teil seiner Geschwindigkeit nehmen könne.

Kant hat also alle Hindernisse, welche der Existenz der lebendigen Kräfte und ihrem Mafse im Wege standen, fort-

geräumt und zwar auf eine Weise, die kaum eine Widerlegung zulässt und mit einer Gründlichkeit, welche musterhaft genannt werden muss. Und wenn er in seinem Schlussworte sagt, es sei nichts weniger als ein grosser Scharfsinn nötig, die Wahrheit hier zu erkennen — denn nach den scharfsinnigen Bemerkungen der Cartesianer sei es nicht schwer, die Verwirrung der Quadratschätzung in der Mathematik zu verhüten und nach den sinnreichen Anstalten der Leibnitzianer sei es fast unmöglich gewesen, sie in der Natur zu vermissen, — so können wir diese Worte nur als den Ausfluss einer übergrossen Bescheidenheit betrachten. Gerade das vergebliche Bemühen selbst der grössten Geister, die Frage in endgiltiger Weise zu lösen, lehrt uns begreifen, welches Wissen, welche Schärfe des Verstandes nötig war, den lebendigen Kräften zu einem vollständigen Siege zu verhelfen. Der Name Kant wird nicht nur in der Geschichte der Philosophie, sondern auch in der der Physik allezeit eine hervorragende Stelle einnehmen.

## Schlusswort.

Wir sind am Ziele unserer Arbeit angelangt; es liegt nicht in unserer Absicht, die Verwertung des Begriffes der lebendigen Kraft in der modernen Mechanik darzustellen, noch auch uns näher auf den der toten Kraft einzulassen, welch letzterer zwar heute nicht mehr gebräuchlich ist, sich aber selbst noch in den Lehrbüchern der Mechanik findet, welche am Anfange dieses Jahrhunderts erschienen. Näheres über diese Dinge findet sich ja in jedem Lehrbuche der analytischen Mechanik, insbesondere aber in den von dem nun leider verstorbenen Professor Jolly geschriebenen „Prinzipien der Mechanik“; in den dort gegebenen historischen Notizen sind treffliche Bemerkungen über unsere heutige Auffassung des Begriffes Kraft und über das Mafs derselben enthalten.

Der Streit um das Mafs der lebendigen Kräfte selbst ist durch Kant und d'Alembert abgeschlossen worden, was sich am besten daraus erkennen lässt, dass sich weder gegen des einen noch gegen des anderen Theorien Widerspruch erhob. Die schärfere Bestimmung der Begriffe war freilich einem Poncelet, einem Coriolis vorbehalten, aus deren Arbeiten wir so recht erkennen, dass ungenaue Definitionen und Zusammenfassung heterogener Dinge unter einen Begriff Schuld an dem Ausbruche wie an der Entwicklung des Kampfes waren.

Aber unvergessen wird dieser Streit bleiben und zwar nicht bloss in der Geschichte der Physik, sondern auch in der des menschlichen Denkens überhaupt; haben doch die grössten Geister aller Nationen mehr als ein halbes Jahrhundert lang an demselben teilgenommen! Er war aber in noch einer Richtung fruchtbar, welche aus den hier vorliegenden Abhandlungen nicht so deutlich hervorleuchtet: er gab Anlass zur Aufstellung einer grossen Zahl von Problemen seitens einzelner Gelehrten sowohl, wie auch seitens verschiedener Akademien teils mathematischer teils physikalischer Natur, an deren Lösung zu arbeiten ein Leibnitz, ein Euler, die Bernoulli und andere sich zur Ehre rechneten!

Der Streit ist aber auch für die heutige Generation trotz des grossen Aufschwunges, welchen die Mechanik seit jenen Zeiten genommen hat, lehrreich. Es gibt wohl keine treffendere Bestätigung des Wortes: Aus den Fehlern anderer lernen wir. Er ist uns ein neuer Beweis des nun allgemein anerkannten Satzes, dass Naturgesetze nur auf empirischem, nie aber auf rein deduktivem Wege gefunden werden; man denke nur an die sich widersprechenden Schlüsse, welche aus der Theorie elastischer Federn gezogen wurden. Wir lernen aber insbesondere, dass ein Streit unfruchtbar ist, so lange die Begriffe, um welche sich derselbe dreht, schwankend sind — Gründe genug, welche uns veranlassen konnten, eine Darstellung dieses denkwürdigen Kampfes zu geben.

---





